MATEMÁTICA

PROF. MS. JAMUR SILVEIRA
professorjamur@ipcconcursos.com.br

1. REVISÃO

RECORDANDO OPERAÇÕES

Recordando as quatro operações: adição; subtração; multiplicação; divisão.

Vamos lembrar como essas operações são feitas e, principalmente, quando devemos utilizá-las na solução de um problema.

Muita gente pensa que quem faz contas com rapidez é bom em matemática. É engano! Fazer contas rapidamente é uma habilidade que se adquire com a prática. Muito mais importante que fazer contas com rapidez é descobrir quais são as operações que devemos usar para resolver um problema. Portanto, em matemática, o mais importante é o raciocínio.

Para começar, leia os quatro problemas abaixo e tente descobrir quais são as contas que devem ser feitas.

- Um motorista de táxi andou 180 km em certo dia e 162 km no dia seguinte. No total, quanto ele andou nesses dois dias?
- Uma mercadoria que custa R$37,00 foi paga com uma nota de R$50,00. De quanto foi o troco?
- Uma caixa de leite tipo “longa vida” possui 16 litros de leite. Quantos litros existem em 12 caixas?
- Devo repartir 24 balas igualmente entre meus três filhos. Quantas balas deve receber cada um?

A adição

Podemos pensar na operação de adição quando queremos juntar as coisas que estão separadas.

Exemplo:

- Em uma pequena escola, existem 3 turmas: uma com 27 alunos, outra com 31 alunos e outra com 18 alunos. Quantos alunos existem ao todo nessa escola? Para reunir os alunos das 3 turmas, devemos somar a quantidade de alunos de cada turma. A operação que devemos fazer é: 27 + 31 + 18 = 76

Existem, portanto, 76 alunos nessa escola.

Cada um dos números de uma soma chama-se parcela. Na operação de adição, podemos somar as parcelas em qualquer ordem. Por isso, temos certeza de que 18 + 27 + 31 também dá 76.

Devemos ainda lembrar que números negativos também podem ser somados. Por exemplo, a soma de - 12 com - 5 dá - 17. Para escrever essa operação fazemos assim:

$- 12 + (- 5) = - 17$

Observe que colocamos - 5 entre parênteses para evitar que os sinais de + e de - fiquem juntos. Mas existe outra maneira, mais simples, de escrever a mesma operação. Veja:

$- 12 - 5 = - 17$

A subtração

Podemos pensar na operação de subtração quando queremos tirar uma quantidade de uma outra para ver quanto sobra. Veja o exemplo:

Uma secretária recebeu a tarefa de preparar 90 envelopes de correspondência. Até a hora do almoço, ela já tinha feito 52. Quantos ela ainda tem de fazer? Temos aqui um exemplo claro de operação de subtração. A operação que devemos fazer é:

$90 - 52 = 38$

Assim, depois do almoço, a secretária deverá preparar ainda 38 envelopes. Observe agora que, em uma subtração, quando o segundo número é maior que o primeiro, o resultado é negativo. Veja:

$9 - 5 = 4$

$5 - 9 = - 4$

Para resumir, as regras são as seguintes:

- Escrever 5 ou + 5 é a mesma coisa.
- Quando sinais de números e sinais de operações aparecerem juntos, então:

(+) (+) = (+)

(+) (-) = (-)

(-) (+) = (-)

(-) (-) = (+)

Por exemplo:

5 + (+ 3) = 5 + 3 = 8
5 + (- 3) = 5 - 3 = 2
5 + (+ 3) = 5 - 3 = 2
5 - (- 3) = 5 + 3 = 8

Veja, a seguir, como devemos proceder numa situação em que há soma e subtração de diversos números.

João abriu uma conta bancária. Depois de algum tempo, essa conta apresentou o seguinte movimento: Qual será o saldo de João após essas operações? Vamos representar os depósitos por números positivos e as retiradas por números negativos. Devemos então fazer a seguinte conta:

53 - 25 + 65 - 30 - 18

O resultado dessa operação será a quantia que João ainda tem no banco. A melhor forma de fazer esse cálculo é somar os números positivos (os depósitos), somar os números negativos (as retiradas) e depois subtrair o segundo resultado do primeiro. Assim:

53 - 25 + 65 - 30 - 18 =
= (53 + 65) -(25 + 30 + 18) =
= 118 - 73 =
= 45

Portanto, João ainda tem R$ 45,00 em sua conta bancária.

A multiplicação

A multiplicação nada mais é que uma soma com parcelas iguais. Por exemplo:

7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 5 x 7 = 35

O número 7 apareceu 5 vezes. Então, 7 vezes 5 dá 35. Da mesma forma:

5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 7 x 5 = 35

Agora, o número 5 apareceu 7 vezes. Então 5 vezes 7 dá 35.

Você já sabe que, em uma multiplicação cada número chama-se fator.

Vamos, agora, recordar algumas propriedades da multiplicação.

1. Na multiplicação, a ordem dos fatores não altera o resultado. Por isso:

5 x 7 = 7 x 5

2. Quando temos várias multiplicações seguidas, qualquer uma delas pode ser feita primeiro. Por exemplo:

2 x 3 x 5 = (2 x 3) x 5 = 6 x 5 = 30
2 x 3 x 5 = 2 x (3 x 5) = 2 x 15= 30
2 x 3 x 5 = (2 x 5) x 3 = 10 x 3= 30

3. Quando um número multiplica uma soma, ele multiplica cada parcela dessa soma. Por exemplo:

2 x (3 + 4 + 5) = 2 x 12 = 24

Ou, ainda:

2 x (3 + 4 + 5) = 2 x 3 + 2 x 4 + 2 x 5 = 6 + 8 + 10 = 24

Falta apenas recordar o que ocorre quando temos multiplicações com números negativos. As regras são as seguintes:

(+) x (-) = (-)
(-) x (+) = (-)
(-) x (-) = (+)

A divisão

Podemos pensar na divisão quando queremos dividir um total de partes iguais ou quando queremos saber quantas vezes um número cabe no outro.

Exemplo:

Desejamos colocar 80 lápis em 5 caixas, de maneira que todas as caixas tenham o mesmo número de lápis. Quantos lápis devemos pôr em cada caixa? A resposta é fácil. Basta dividir 80 por 5.

80 / 5 = 16

Logo, cada caixa deve conter 16 lápis.

No exemplo que acabamos de ver, a divisão foi exata ou seja, conseguimos colocar a mesma quantidade de lápis em cada caixa sem que sobrasse nenhum.

O que aconteceria, entretanto, se tivéssemos 82 lápis para pôr nas 5 caixas? A resposta é fácil. Cada caixa continuaria com 16 lápis, mas sobrariam 2.

Veja a operação:

```
 82 |_5
-5   16
```

32
-30
2

Na operação acima, 82 é o dividendo, 5 é o divisor, 16 é o quociente e 2 é o resto. Esses quatro números se relacionam da seguinte forma:

82 = 5 x 16 + 2

(dividendo) = (divisor) x (quociente) + (resto)

Atenção!

O resto é sempre positivo e menor que o divisor.

Ao fazer uma divisão, estaremos sempre encontrando dois novos números: o quociente e o resto. Vamos ver mais um exemplo do uso dessa operação em um problema.

Exercício:

1. Efetue as operações indicadas:
a) 37 + 43 =
b) 55 - 18 =
c) 18 - 55 =
d) 12 + (- 7) =
e) 12 - (- 7) =
f) - 9 - 6 =
g) - 9 + (- 6) =
h) - 9 - (- 6) =
i) 13 x 7 =
j) (- 8) x 9 =
l) (7 - 3) x 4 =
m) (3 - 8) x (- 4) =

2. Efetue as operações indicadas. Lembre que, se várias operações aparecem em uma mesma expressão, as multiplicações e divisões são feitas primeiro e depois as somas e subtrações.
a) 4 + 2 x 3 =
b) 20 - 3 + 12 - 30 / 6 =
c) 13 x 112 - 11 x 10 =

3. Um trabalhador recebe R$12 por dia de trabalho, mais uma gratificação de R$8 por semana. Sabendo que cada semana tem 6 dias de trabalho, quanto esse trabalhador deverá ter recebido após 4 semanas?

4. Certo automóvel faz, na estrada, 12 km por litro de gasolina. Para fazer uma viagem de 340 km, o proprietário colocou no tanque 30 litros de gasolina. Esse combustível será suficiente?

5. Em uma festa, as mesas do salão são quadradas e acomodam, no máximo, 4 pessoas. Para que 150 pessoas possam se sentar, quantas mesas serão necessárias?

6. Uma escola tem 4 salas e cada sala tem 30 carteiras. Na primeira sala existem 26 alunos, na segunda, 24, na terceira, 23 e na quarta, 19. Quantos alunos ainda podem ser matriculados?

7. João tem um terreno retangular de 20m de frente por 30m de fundo, e deseja cercá-lo com uma cerca de arame com 5 fios. Quantos metros de arame ele deverá comprar?

Conjuntos Numéricos

Conjunto dos Números Naturais

São todos os números inteiros positivos, incluindo o zero. É representado pela letra maiúscula N.

Caso queira representar o conjunto dos números naturais não-nulos (excluindo o zero), deve-se colocar um * ao lado do N:

N = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10, ...}

$N^* = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, ...\}$

Conjunto dos Números Inteiros

São todos os números que pertencem ao conjunto dos Naturais mais os seus respectivos opostos (negativos).

São representados pela letra Z:

$Z = \{... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

O conjunto dos inteiros possui alguns subconjuntos, eles são:

- Inteiros não negativos

São todos os números inteiros que não são negativos. Logo percebemos que este conjunto é igual ao conjunto dos números naturais. É representado por Z_+:

$Z_+ = \{0,1,2,3,4,5,6, ...\}$

- Inteiros não positivos

São todos os números inteiros que não são positivos. É representado por Z_-:

$Z_- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

- Inteiros não negativos e não-nulos

É o conjunto Z_+ excluindo o zero. Representa-se esse subconjunto por Z^*_+:

$Z^*_+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$

$Z^*_+ = N^*$

- Inteiros não positivos e não nulos

São todos os números do conjunto Z_- excluindo o zero. Representa-se por Z^*_-.

$Z^*_- = \{... -4, -3, -2, -1\}$

Conjunto dos Números Racionais

Os números racionais é um conjunto que engloba os números inteiros (Z), números decimais finitos (por exemplo, 743,8432) e os números decimais infinitos **periódicos** (que repete uma sequência de algarismos da parte decimal infinitamente), como "12,050505...", são também conhecidas como **dízimas periódicas**.

Os racionais são representados pela letra Q.

Conjunto dos Números Irracionais

É formado pelos números decimais infinitos não-periódicos. Um bom exemplo de número irracional é o número PI (resultado da divisão do perímetro de uma circunferência pelo seu diâmetro), que vale 3,14159265 .... Atualmente, supercomputadores já conseguiram calcular bilhões de casas decimais para o PI.

Também são irracionais todas as raízes não exatas, como a raiz quadrada de 2 (1,4142135 ...)

Conjunto dos Números Reais

É formado por todos os conjuntos citados anteriormente (união do conjunto dos racionais com os irracionais).

Representado pela letra R.

Frações

O símbolo $\frac{a}{b}$ significa a:b, sendo ***a*** e ***b*** números naturais e b *diferente de zero*.
Chamamos:

- $\frac{a}{b}$ de fração;
- ***a*** de numerador;
- ***b*** de denominador.

Se ***a*** é múltiplo de ***b***, então $\frac{a}{b}$ é um número natural.
Veja um exemplo:

A fração $\frac{8}{2}$ é igual a 8:2. Neste caso, 8 é o numerador e 2 é o denominador. Efetuando a divisão de 8 por 2, obtemos o quociente 4. Assim, $\frac{8}{2}$ é um número natural e 8 é múltiplo de 2.

Classificação das frações

Fração **própria**: o numerador é menor que o denominador: $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}$

Fração **imprópria**: o numerador é maior ou igual ao denominador. $\frac{4}{3}, \frac{5}{5}, \frac{6}{4}$

Fração **aparente**: o numerador é múltiplo do denominador. $\frac{6}{3}, \frac{24}{12}, \frac{8}{4}$

Frações equivalentes

Frações equivalentes são frações que representam a mesma parte do todo.

Exemplo: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}$ são equivalentes

Para encontrar frações equivalentes devemos multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número natural, diferente de zero.

Exemplo: obter frações equivalentes à fração $\frac{1}{2}$.

$\frac{1.2}{2.2} = \frac{2}{4}$ $\quad \frac{1.3}{2.3} = \frac{3}{6}$ $\quad \frac{1.4}{2.4} = \frac{4}{8}$ $\quad \frac{1.5}{2.5} = \frac{5}{10}$

Portanto as frações $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$ são algumas das frações equivalentes a $\frac{1}{2}$.

Simplificação de frações

Uma fração equivalente a $\frac{9}{12}$, com termos menores, é $\frac{3}{4}$. A fração $\frac{3}{4}$ foi obtida dividindo-se ambos os termos da fração $\frac{9}{12}$ pelo fator comum 3. Dizemos que a fração $\frac{3}{4}$ é uma fração simplificada de $\frac{9}{12}$.

A fração $\frac{3}{4}$ não pode ser simplificada, por isso é chamada de *fração irredutível*. A fração $\frac{3}{4}$ não pode ser simplificada porque 3 e 4 não possuem nenhum fator comum.

Adição e subtração de números fracionários

Temos que analisar dois casos:

1º) denominadores iguais

Para somar frações com denominadores iguais, basta somar os numeradores e conservar o denominador.

Para subtrair frações com denominadores iguais, basta subtrair os numeradores e conservar o denominador.

Observe os exemplos:

$$\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

2º) denominadores diferentes

Para somar frações com denominadores diferentes, uma solução é obter frações equivalentes, de denominadores iguais ao mmc dos denominadores das frações. Exemplo: somar as frações $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{2}$.

Obtendo o mmc dos denominadores temos mmc(5,2) = 10.

$\frac{4}{5} = \frac{?}{10}$ (10:5).4 = 8 $\frac{5}{2} = \frac{?}{10}$ (10:2).5 = 25

$$\frac{8}{10} + \frac{25}{10} = \frac{33}{10}$$

Resumindo: utilizamos o mmc para obter as frações equivalentes e depois somamos normalmente as frações, que já terão o mesmo denominador, ou seja, utilizamos o caso 1.

Multiplicação e divisão de números fracionários

Na **multiplicação** de números fracionários, devemos multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador, assim como é mostrado nos exemplos abaixo:

$$\frac{8}{3} x \frac{4}{3} = \frac{8x4}{3x3} = \frac{32}{9}$$

$$\frac{-5}{2} x \frac{4}{3} = \frac{-5x4}{2x3} = \frac{-20}{6} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$$

Na **divisão** de números fracionários, devemos multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda, como é mostrado no exemplo abaixo:

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{8}{3} x \frac{3}{4} = \frac{24}{12} = 2$$

Potenciação e radiciação de números fracionários

Na **potenciação**, quando elevamos um número fracionário a um determinado expoente, estamos elevando o numerador e o denominador a esse expoente, conforme os exemplos abaixo:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

Na **radiciação**, quando aplicamos a raiz quadrada a um número fracionário, estamos aplicando essa raiz ao numerador e ao denominador, conforme o exemplo abaixo:

$$\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$$

$$\sqrt{1{,}44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Números Decimais

Adição

Na adição de números decimais devemos somar os números de mesma ordem de unidade, décimo com décimo, centésimo com centésimo.

Antes de iniciar a adição, devemos colocar vírgula debaixo de vírgula.

Exemplos:
0,3 + 0,81
1,42 + 2,03
7,4 + 1,23 + 3,122

Subtração

A subtração de números decimais é efetuada da mesma forma que a adição.
4,4 - 1,21
2,21 - 1,211
9,1 - 4,323

Multiplicação

Efetuamos a multiplicação normalmente. Em seguida, contam-se as casas decimais de cada número e o produto fica com o número de casas decimais igual à soma das casas decimais dos fatores.

Exemplos:
4,21 x 2,1
0,23 x 1,42
0,42 x 1,2

Divisão

Na divisão de números decimais, o dividendo e o divisor devem ter o mesmo número de casas decimais. Devemos igualá-las antes de começar a divisão.

7,02 : 3,51 (O número de casa decimais são iguais, eliminamos a virgula e efetuamos a divisão normal)

11,7 : 2,34 (Igualamos o número de casas decimais, acrescentando um 0, eliminamos a vírgula e efetuamos a divisão)

23 : 7 (A divisão não é exata, acrescenta a vírgula para acrescentar um zero no resto)

2. MMC / MDC

Máximo Divisor Comum (M.D.C.)

Dois números naturais sempre têm divisores comuns. Por exemplo: os divisores comuns de 12 e 18 são 1,2,3 e 6. Dentre eles, 6 é o maior. Então chamamos o **6** de **máximo divisor comum de 12 e 18** e indicamos **m.d.c.(12,18) = 6**.

> O maior divisor comum de dois ou mais números é chamado de **máximo divisor comum** desses números. Usamos a abreviação **m.d.c.**

Alguns exemplos:
mdc (6,12) = 6
mdc (12,20) = 4
mdc (20,24) = 4
mdc (12,20,24) = 4
mdc (6,12,15) = 3

CÁLCULO DO M.D.C.

Um modo de calcular o m.d.c. de dois ou mais números é utilizar a decomposição desses números em fatores primos.
- decompomos os números em fatores primos;
- o m.d.c. é o produto dos fatores primos comuns.
Acompanhe o cálculo do m.d.c. entre 36 e 90:

36 = 2 x **2** x **3** x **3**
90 = **2** x **3** x **3** x 5
O m.d.c. é o produto dos fatores primos comuns => m.d.c.(36,90) = **2 x 3 x 3**
Portanto **m.d.c.(36,90) = 18**.
Escrevendo a fatoração do número na forma de potência temos:
36 = $\mathbf{2^2}$ x $\mathbf{3^2}$
90 = **2** x $\mathbf{3^2}$ x5
Portanto m.d.c.(36,90) = 2 x 3^2 = 18.

> O **m.d.c.** de dois ou mais números, **quando fatorados**, é o produto dos fatores comuns a eles, cada um elevado ao menor expoente.

CÁLCULO DO M.D.C. PELO PROCESSO DAS DIVISÕES SUCESSIVAS

Nesse processo efetuamos várias divisões até chegar a uma divisão exata. O divisor desta divisão é o m.d.c. Acompanhe o cálculo do m.d.c.(48,30).
Regra prática:
- dividimos o número maior pelo número menor;
  48 / **30** = 1 (com resto **18**)
- dividimos o divisor 30, que é divisor da divisão anterior, por 18, que é o resto da divisão anterior, e assim sucessivamente;
  30 / **18** = 1 (com resto **12**)
  18 / **12** = 1 (com resto **6**)
  12 / **6** = 2 (com resto zero - divisão exata)
- O **divisor da divisão exata** é 6. Então **m.d.c.(48,30) = 6**.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI

> Dois ou mais números são **primos entre si** quando o máximo divisor comum desses números é **1**.

Exemplos:
Os números 35 e 24 **são** números primos entre si, pois mdc (35,24) = 1.
Os números 35 e 21 **não são** números primos entre si, pois mdc (35,21) = 7.

MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM (M.M.C.)

Dois ou mais números sempre têm múltiplos comuns a eles.

Vamos achar os múltiplos comuns de 4 e 6:
Múltiplos de 6: **0**, 6, **12**, 18, **24**, 30,...
Múltiplos de 4: **0**, 4, 8, **12**, 16, 20, **24**,...
Múltiplos comuns de 4 e 6: **0**, **12**, **24**,...

Dentre estes múltiplos, diferentes de zero, **12 é o menor deles**. Chamamos o **12 de mínimo múltiplo comum de 4 e 6**.

O menor múltiplo comum de dois ou mais números, diferente de zero, é chamado de **mínimo múltiplo comum** desses números. Usamos a abreviação **m.m.c.**

CÁLCULO DO M.M.C.

Podemos calcular o m.m.c. de dois ou mais números utilizando a fatoração.

Acompanhe o cálculo do m.m.c. de 12 e 30:

- decompomos os números em fatores primos
- o m.m.c. é o produto dos fatores primos comuns e não-comuns:

12 = **2** x **2** x **3**
30 = **2** x **3** x **5**
m.m.c (12,30) = **2** x **2** x **3** x **5**

O **m.m.c.** de dois ou mais números, **quando fatorados**, é o produto dos fatores comuns e não-comuns a eles, cada um elevado ao maior expoente.

PROCESSO DA DECOMPOSIÇÃO SIMULTÂNEA

Neste processo decompomos todos os números ao mesmo tempo, num dispositivo como mostra a figura ao lado. O produto dos fatores primos que obtemos nessa decomposição é o m.m.c. desses números. Ao lado vemos o cálculo do m.m.c.(15,24,60)

Portanto, m.m.c.(15,24,60) = 2 x 2 x 2 x 3 x 5 = **120**

15, 24, 60	2
15, 12, 30	2
15, 6 , 15	2
15, 3 , 15	3
5, 1 , 5	5
1, 1 , 1	

PROPRIEDADE DO M.M.C.

Entre os números 3, 6 e 30, o número 30 é múltiplo dos outros dois. Neste caso, 30 é o m.m.c.(3,6,30). Observe:

3 , 6 , 30	2
3 , 3 , 15	3
1 , 1 , 5	5
1 , 1 , 1	

m.m.c.(3,6,30) = 2 x 3 x 5 = **30**

Dados dois ou mais números, **se um deles é múltiplo de todos os outros**, então **ele é o m.m.c.** dos números dados.

Considerando os números 4 e 15, ques são primos entre si. O m.m.c.(4,15) é igual a 60, que é o produto de 4 por 15. Observe:

4 , 15	2
2 , 15	2
1 , 15	3
1 , 5	5
1 , 1	

m.m.c.(4,15) = 2 x 2 x 3 x 5 = **60**

Dados dois **números primos entre si**, o **m.m.c.** deles é o produto desses números.

3. EQUAÇÃO DE 1º GRAU

Equações de primeiro grau
(com uma variável)

Equação é toda sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. A palavra equação tem o prefixo **equa**, que em latim quer dizer "igual". Exemplos:
$2x + 8 = 0$
$5x - 4 = 6x + 8$
$3a - b - c = 0$

Não são equações:
$4 + 8 = 7 + 5$ **(Não é uma sentença aberta)**
$x - 5 < 3$ **(Não é igualdade)**
$5 \neq -2$ **(não é sentença aberta, nem igualdade)**

A equação geral do primeiro grau:
ax+b = 0
onde **a** e **b** são números conhecidos e **a** diferente de 0, se resolve de maneira simples: subtraindo b dos dois lados, obtemos:
ax = -b
dividindo agora por a (dos dois lados), temos:

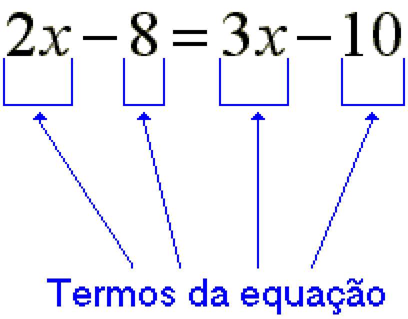
$$x = -\frac{b}{a}$$

Considera a equação **2x - 8 = 3x -10**

A letra é a **incógnita** da equação. A palavra **incógnita** significa " desconhecida".
Na equação acima a incógnita é x; tudo que antecede o sinal da igualdade denomina-se 1º **membro,** e o que sucede, 2º**membro**.

$$\underbrace{2x-8}_{1^{\circ}Membro.} = \underbrace{3x-10}_{2^{\circ}Membro.}$$

Qualquer parcela, do 1º ou do 2º membro, é um termo da equação.



Equação do 1º grau na incógnita *x* é toda equação que pode ser escrita na forma *ax=b*, sendo *a* e *b* números racionais, com *a* diferente de zero.

Conjunto Verdade e Conjunto Universo de uma Equação

Considere o conjunto *A* = {0, 1, 2, 3, 4, 5} e a equação x + 2 = 5.

Observe que o número 3 do conjunto *A* é denominado **conjunto universo** da equação e o conjunto {3} é o **conjunto verdade** dessa mesma equação.

Observe este outro exemplo:

Determine os números inteiros que satisfazem a equação $x^2 = 25$

O conjunto dos números inteiro é o conjunto universo da equação.

Os números -5 e 5, que satisfazem a equação, formam o conjunto verdade, podendo ser indicado por: V = {-5, 5}.

Daí concluímos que:

Conjunto Universo é o conjunto de todos os valores que variável pode assumir. Indica-se por **U.**

Conjunto verdade é o conjunto dos valores de **U**, que tornam verdadeira a equação . Indica-se por **V**.

Observações:

O conjunto verdade é subconjunto do conjunto universo.

$$V \subset U$$

Não sendo citado o conjunto universo, devemos considerar como conjunto universo o conjunto dos números racionais.

$$U = \mathbb{Q}$$

O conjunto verdade é também conhecido por **conjunto solução** e pode ser indicado por **S**.

Raízes de uma equação

Os elementos do conjunto verdade de uma equação são chamados raízes da equação.

Para verificar se um número é raiz de uma equação, devemos obedecer à seguinte seqüência:

- Substituir a incógnita por esse número.
- Determinar o valor de cada membro da equação.
- Verificar a igualdade, sendo uma sentença verdadeira, o número considerado é raiz da equação.

Exemplos:

Verifique quais dos elementos do conjunto universo são raízes das equações abaixo, determinando em cada caso o conjunto verdade.

Resolva a equação $x - 2 = 0$, sendo $U = \{0, 1, 2, 3\}$.

Para $x = 0$ na equação $x - 2 = 0$ temos: 0 - 2 = 0 => -2 = 0. (F)

Para $x = 1$ na equação $x - 2 = 0$ temos: 1 - 2 = 0 => -1 = 0. (F)

Para $x = 2$ na equação $x - 2 = 0$ temos: 2 - 2 = 0 => 0 = 0. (V)

Para $x = 3$ na equação $x - 2 = 0$ temos: 3 - 2 = 0 => 1 = 0. (F)

Verificamos que 2 é raiz da equação $x - 2 = 0$, logo $V = \{2\}$.

Resolva a equação $2x - 5 = 1$, sendo $U = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Para $x = -1$ na equação $2x - 5 = 1$ temos: 2 . (-1) - 5 = 1 => -7 = 1. (F)

Para $x = 0$ na equação $2x - 5 = 1$ temos: 2 . 0 - 5 = 1 => -5 = 1. (F)

Para $x = 1$ na equação $2x - 5 = 1$ temos: 2 . 1 - 5 = 1 => -3 = 1. (F)

Para $x = 2$ na equação $2x - 5 = 1$ temos: 2 . 2 - 5 = 1 => -1 = 1. (F)

A equação $2x - 5 = 1$ não possui raiz em *U*, logo $V = \varnothing$.

Equações de primeiro grau
(com duas variáveis)

Considere a equação: $2x - 6 = 5 - 3y$

Trata-se de uma equação com duas variáveis, x e y, pode ser transformada numa equação equivalente mais simples. Assim:

$2x + 3y = 5 + 6$
$2x + 3y = 11$ ==> **Equação do 1º grau na forma $ax + by = c$.**

Denominando equação de 1º grau com duas variáveis, x e y, a toda equação que pode ser reproduzida à forma $ax + by = c$, sendo a e b números diferentes de zero, simultaneamente.

Na equação $ax + by = c$, denominamos:

$x + y$ - variáveis ou incógnita
a - coeficiente de x
b - coeficiente de y
c - termo independente

Exemplos:

$x + y = 30$
$2x + 3y = 15$
$x - 4y = 10$
$-3x - 7y = -48$
$2x- 3y = 0$
$x - y = 8$

Solução de uma equação de 1º grau com duas variáveis

Quais o valores de x e y que tornam a sentença $x - 2y = 4$ verdadeira?

Observe os pares abaixo:
$x = 6$, $y = 1$
$x - 2y = 4$
$6 - 2 . 1 = 4$
$6 - 2 = 4$
$4 = 4$ (V)

$x = 8$, $y = 2$
$x - 2y = 4$
$8 - 2 . 2 = 4$
$8 - 4 = 4$
$4 = 4$ (V)

$x = -2$, $y = -3$
$x - 2y = 4$
$-2 - 2 . (-3) = 4$
$-2 + 6 = 4$
$4 = 4$ (V)

Verificamos que todos esses pares são **soluções** da equação $x - 2y = 4$.
Assim, os pares (6, 1); (8, 2); (-2, -3) são algumas das soluções dessa equação.
Uma equações do 1º grau com duas variáveis tem **infinitas soluções** - infinitos (x, y) - , sendo, portanto, seu conjunto universo $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
Podemos determinar essas soluções, atribuindo-se valores quaisquer para uma das variáveis, calculando a seguir o valor da outra. Exemplo:

Determine uma solução para a equação $3x - y = 8$.
Atribuímos para o x o valor 1, e calculamos o valor de y. Assim:

$3x - y = 8$
$3 . (1) - y = 8$
$3 - y = 8$
$-y = 5$ ==> **Multiplicamos por -1**
$y = -5$

O par (1, -5) é uma das soluções dessa equação.
$V = \{(1, -5)\}$

Resumindo:

Um par ordenado (r, s) é solução de uma equação $ax + by = c$ (a e $b$não-nulos simultaneamente), se para $x = r$ e $y = s$ a sentença é verdadeira.

Sistemas de Equações

Considere o seguinte problema:
Pipoca, em sua última partida, acertou x arremessos de 2 pontos e y arremessos de 3 pontos. Ele acertou 25 arremessos e marcou 55 pontos. Quantos arremessos de 3 pontos ele acertou?
Podemos traduzir essa situação através de duas equações, a saber:
$x + y = 25$ **(total de arremessos certo)**
$2x + 3y = 55$ **(total de pontos obtidos)**

Essas equações contém um **sistema de equações.**
Costuma-se indicar o sistema usando **chave**.

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 2x + 3y = 55 \end{cases}$$

O par ordenado (20, 5), que torna ambas as sentenças verdadeiras, é chamado **solução do sistema**.Um sistema de duas equações com duas variáveis possui uma **única solução**.

Resolução de Sistemas

A resolução de um sistema de duas equações com duas variáveis consiste em determinar um par ordenado que torne verdadeiras, ao mesmo tempo, essas equações.
Estudaremos a seguir alguns métodos:

Método de substituição

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$$

Solução
- determinamos o valor de x na 1ª equação.
$x = 4 - y$
- Substituímos esse valor na 2ª equação.
$2 \quad . (4 - y) -3y = 3$
- Resolvemos a equação formada.
$8 - 2y -3y = 3$
$8 - 2y -3y = 3$
$-5y = -5$ => **Multiplicamos por -1**
$5y = 5$

$$y = \frac{5}{5}$$

$y = 1$
- Substituímos o valor encontrado de y, em qualquer das equações, determinando x.

$x + 1 = 4$
$x = 4 - 1$
$x = 3$
- A solução do sistema é o par ordenado (3, 1).
$V = \{(3, 1)\}$

Método da adição

Sendo $U = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, observe a solução de cada um dos sistemas a seguir, pelo método da adição.
Resolva o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Solução

- Adicionamos membros a membros as equações:

$$\begin{cases} x + \cancel{y} = 10 \\ x - \cancel{y} = 6 \end{cases}$$

$2x = 16$

$$x = \frac{16}{2}$$

$x = 8$

- Substituímos o valor encontrado de x, em qualquer das equações, determinado y:

$8 + y = 10$
$y = 10 - 8$
$y = 2$

A solução do sistema é o par ordenado (8, 2)
$V = \{(8, 2)\}$

4. EQUAÇÃO DE 2º GRAU

Equações de 2º grau

Definições

Denomina-se equação do 2º grau na incógnita x, toda equação da forma:

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0;\ a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.}$

Exemplo:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$ é um equação do 2º grau com $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.
- $6x^2 - x - 1 = 0$ é um equação do 2º grau com $a = 6$, $b = -1$ e $c = -1$.
- $7x^2 - x = 0$ é um equação do 2º grau com $a = 7$, $b = -1$ e $c = 0$.
- $x^2 - 36 = 0$ é um equação do 2º grau com $a = 1$, $b = 0$ e $c = -36$.

Nas equações escritas na forma $ax^2 + bx + c = 0$ (**forma normal** ou **forma reduzida** de uma equação do 2º grau na incógnita x) chamamos a, b e c de **coeficientes**.

a é sempre o coeficiente de x^2;
b é sempre o coeficiente de x,
c é o coeficiente ou termo independente.

Equação completas e Incompletas

Uma equação do 2º grau é **completa** quando ***b*** e ***c*** são diferentes de zero. Exemplos:
$x^2 - 9x + 20 = 0$ e $-x^2 + 10x - 16 = 0$ são equações completas.

Uma equação do 2º grau é **incompleta** quando ***b*** ou ***c*** é igual a zero, ou ainda quando ambos são iguais a zero. Exemplos:

$x^2 - 36 = 0$	$x^2 - 10x = 0$	$4x^2 = 0$
($b = 0$)	($c = 0$)	($b = c = 0$)

Raízes de uma equação do 2º grau

Resolver uma equação do 2º grau significa determinar suas **raízes**.

Raiz é o número real que, ao substituir a incógnita de uma equação, transforma-a numa sentença verdadeira.

O conjunto formado pelas raízes de uma equação denomina-se **conjunto verdade** ou **conjunto solução**. Exemplos:

- Dentre os elementos do conjuntos A= {-1, 0, 1, 2}, quais são raízes da equação $x^2 - x - 2 = 0$?

  Solução

  Substituímos a incógnita *x* da equação por cada um dos elementos do conjunto e verificamos quais as sentenças verdadeiras.

Para $x = -1$	$(-1)^2 - (-1) - 2 = 0$ $1 + 1 - 2 = 0$ $0 = 0$	(V)
Para $x = 0$	$0^2 - 0 - 2 = 0$ $0 - 0 -2 = 0$ $-2 = 0$	(F)
Para $x = 1$	$1^2 - 1 - 2 = 0$ $1 - 1 - 2 = 0$ $-2 = 0$	(F)
Para $x = 2$	$2^2 - 2 - 2 = 0$ $4 - 2 - 2 = 0$ $0 = 0$	(V)

Logo, -1 e 2 são raízes da equação.

- Determine *p* sabendo que 2 é raiz da equação $(2p - 1)\,x^2 - 2px - 2 = 0$.

Solução

Substituindo a incógnita *x* por 2, determinamos o valor de *p.*

$$(2p-1).\,2^2 - 2p\,.\,2 - 2 = 0$$
$$(2p-1).\,4 - 4p - 2 = 0$$
$$8p - 4 - 4p - 2 = 0$$
$$4p - 6 = 0$$
$$4p = 6$$
$$p = \frac{6}{4} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{3}{2}$$

- Logo, o valor de *p* é $\frac{3}{2}$.

Resolução de equações incompletas

Resolver uma equação significa determinar o seu **conjunto verdade**.

Utilizamos na resolução de uma equação incompleta as técnicas da fatoração e duas importantes propriedades dos números reais:

1ª Propriedade: Se $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $x.y = 0$, então, $x = 0$ ou $y = 0$

2ª Propriedade: Se $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $x^2 = y$, então, $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

1º Caso: Equação do tipo $ax^2 + bx = 0$.
Exemplo:

- Determine as raízes da equação $x^2 - 8x = 0$, sendo U = IR.

Solução
Inicialmente, colocamos *x* em evidência:

$$x.(x-8) = 0$$

Para o produto ser igual a zero, basta que um dos fatores também o seja. Assim:

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 8$$

Obtemos dessa maneira duas raízes que formam o conjunto verdade:

$$V = \{0, 8\}$$

De modo geral, a equação do tipo $ax^2 + bx = 0$ tem para soluções $x = 0$ e $x = -\frac{b}{a}$.

2º Caso: Equação do tipo $ax^2 + c = 0$.
Exemplos:

- Determine as raízes da equação $2x^2 - 72 = 0$, sendo *U* = **IR**.

Solução

$$2x^2 = 72$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{36}$$

$$x = \pm\sqrt{36}$$

$$x = \pm 6$$

A equação tem duas raízes simétricas.

De modo geral, a equação do tipo $ax^2 + c = 0$ possui duas raízes reais se $-\frac{c}{a}$ for um número positivo, não tendo raiz real caso $-\frac{c}{a}$ seja um número negativo.

Resolução de equações completas

Para solucionar equações completas do 2º grau utilizaremos a **fórmula de Bhaskara**.

A partir da equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que *a*, *b*, *c* $\in$ **IR** e $a \neq 0$, desenvolveremos passo a passo a dedução da fórmula de Bhaskara (ou fórmula resolutiva).

1º passo: multiplicaremos ambos os membros por 4*a.*

$$(4a).(ax^2 + bx + c) = 0.(4a)$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

2º passo: passar 4*ac* par o 2º membro.

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

3º passo: adicionar b^2 aos dois membros.

$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{\text{Trinômio quadrado perfeito}} = b^2 - 4ac$$

4º passo: fatorar o 1º elemento.

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

5º passo: extrair a raiz quadrada dois membros.

$$\sqrt{(2ax+b)^2} = \pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$$2ax+b = \pm\sqrt{b^2-4ac}$$

6º passo: passar *b* para o 2º membro.

$$2ax = -b \pm\sqrt{b^2-4ac}$$

7º passo: dividir os dois membros por $2a \quad (a \neq 0)$.

$$\frac{2ax}{2a} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Assim, encontramos a fórmula resolutiva da equação do 2º grau:

$$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Podemos representar as duas raízes reais por x' e x", assim:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

Exemplos:

- resolução a equação: $7x^2+13x-2=0$

  Temos $a=7,\ b=13 \text{ e } c=-2$

$$x = \frac{-13\pm\sqrt{13^2-4.7.(-2)}}{2.7}$$

$$x = \frac{-13\pm\sqrt{169+56}}{14}$$

$$x = \frac{-13\pm\sqrt{225}}{14}$$

$$x = \frac{-13\pm 15}{14}$$

$$\text{Portanto}: \begin{cases} x' = \dfrac{-13+15}{14} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7} \\ x'' = \dfrac{-13-15}{14} = \dfrac{-28}{14} = -2 \end{cases}$$

$$V = \left\{-2,\ \frac{1}{7}\right\}$$

Discriminante

Denominamos **discriminante** o radical $b^2 - 4ac$ que é representado pela letra grega Δ (delta).

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Podemos agora escrever deste modo a fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

De acordo com o discriminante, temos três casos a considerar:

1º Caso: O discriminante é positivo $(\Delta > 0)$.

O valor de $\sqrt{\Delta}$ é real e a equação tem duas raízes reais diferentes, assim representadas:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemplo:

- Para quais valores de *k* a equação $x^2 - 2x + k - 2 = 0$ admite raízes reais e desiguais?

Solução

Para que a equação admita raízes reais e desiguais, devemos ter $\Delta > 0$.

$$b^2 - 4ac > 0$$
$$(-2)^2 - 4.1.(k-2) > 0$$
$$4 - 4k + 8 > 0$$
$$-4k + 12 > 0 \quad \rightarrow \textbf{Multiplicamos ambos os membros por -1.}$$
$$4k - 12 < 0$$
$$4k < 12$$
$$k < 3$$

Logo, os valores de *k* devem ser menores que 3.

2º Caso: O discriminante é nulo $(\Delta = 0)$

O valor de $\sqrt{\Delta}$ é nulo e a equação tem duas raízes reais e iguais, assim representadas:

$$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$$

Exemplo:

- Determine o valor de *p*, para que a equação $x^2 - (p - 1)x + p - 2 = 0$ possua raízes iguais.

Solução

Para que a equação admita raízes iguais é necessário que $\Delta = 0$.

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$[-(p-1)]^2 - 4.1(p-2) = 0$$
$$p^2 - 2p + 1 - 4p + 8 = 0$$
$$p^2 - 6p + 9 = 0$$
$$(p-3)^2 = 0$$
$$p = 3$$

Logo, o valor de *p* é 3.

3º Caso: O discriminante é negativo $(\Delta < 0)$.

O valor de $\sqrt{\Delta}$ não existe em **IR**, não existindo, portanto, raízes reais. As raízes da equação são **número complexos**.

Exemplo:

- Para quais valores de m a equação $3x^2 + 6x + m = 0$ não admite nenhuma raiz real?

Solução

Para que a equação não tenha raiz real devemos ter $\Delta < 0$.

$$b^2 - 4ac < 0$$
$$6^2 - 4.3.m < 0$$
$$36 - 12m < 0$$
$$-12m < -36 \quad \rightarrow \textbf{ Multiplicamos ambos os membros por -1}$$
$$12m > 36$$
$$m > 3$$

Logo, os valores de *m* devem ser maiores que 3.

Resumindo

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

Para $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais diferentes.

Para $\Delta = 0$, a equação tem duas raízes reais iguais.

Para $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

RELAÇÕES ENTRE OS COEFICIENTES E AS RAÍZES

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e sejam x'e x'' as raízes reais dessa equação.

Logo: $x' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Observe as seguintes relações:

- **Soma das raízes (*S*)**

$$x'+x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\cancel{\sqrt{\Delta}}-b-\cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a} = \frac{-b}{a}$$

$$\boxed{S = x'+x'' = \frac{-b}{a}}$$

- **Produto das raízes (*P*)**

$$x' \cdot x'' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b+\sqrt{\Delta}).(-b-\sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2}$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac$,temos:

$$x'.x'' = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2} = \frac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a}^2} = \frac{c}{a}$$

$$\boxed{P = x'.x'' = \frac{c}{a}}$$

Denominamos essas relações de **relações de Girard**. Verifique alguns exemplos de aplicação dessas relações.

- Determine a soma e o produto das raízes da equação $10x^2 + x - 2 = 0$.

Solução
Nesta equação, temos: a=10, b=1 e c=-2.

A soma das raízes é igual a $-\frac{b}{a}$. O produto das raízes é igual a $\frac{c}{a}$

Assim: $S=-\frac{1}{10}$ Assim: $P=-\frac{2:2}{10:2}=-\frac{1}{5}$

- Determine o valor de **k** na equação $x^2 + (2k - 3)x + 2 = 0$, de modo que a soma de suas raízes seja igual a 7.
  Solução
  Nesta equação, temos: a=1, b=2k e c=2.
  $S = x_1 + x_2 = 7$
  $$S=-\frac{b}{a}=\frac{-(2k-3)}{1}=7 \Rightarrow -2k+3=7 \Rightarrow -2k=7-3 \Rightarrow -2k=4 \Rightarrow k=-2$$
  Logo, o valor de ***k*** é -2.

- Determine o valor de ***m*** na equação $4x^2 - 7x + 3m = 0$, para que o produto das raízes seja igual a -2.
  Solução
  Nesta equação, temos: a=4, b=-7 e c=3*m.*
  $P = x_1 . x_2 = -2$
  $$P=\frac{c}{a}=\frac{3m}{4}=-2 \Rightarrow 3m=-8 \Rightarrow -\frac{8}{3}$$
  Logo, o valor de *m* é $-\frac{8}{3}$.
- Determine o valor de ***k*** na equação $15x^2 + kx + 1 = 0$, para que a soma dos inversos de suas raízes seja igual a 8.

  Solução
  Considere x_1 e x_2 as raízes da equação.
  A soma dos inversos das raízes corresponde a $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.
  Assim:
  $$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=8 \Rightarrow \frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=8 \Rightarrow \frac{\textit{Soma} \text{ das raízes}}{\text{Produto das raízes}}=8$$
  $$\frac{-b/\cancel{a}}{c/\cancel{a}}=8 \Rightarrow \frac{-b}{c}=8 \Rightarrow \frac{-k}{1}=8 \Rightarrow k=-8$$
  Logo, o valor de ***k*** é -8.

- Determine os valores de ***m*** para os quais a equação $(2m - 1) x^2 + (3m - 2) x + m + 2 = 0$ admita:
  a) raízes simétricas;
  b) raízes inversas.

  Solução
  Se as raízes são simétricas, então S=0.
  $$S=\frac{-b}{a}=\frac{-(3m-2)}{2m-1}=0 \Rightarrow -3m+2=0$$
  $$-3m=-2$$
  $$m=\frac{2}{3}$$

Se as raízes são inversas, então P=1.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m+2}{2m-1} = 1 \Rightarrow m + 2 = 2m - 1$$

$$m - 2m = -1 - 2$$

$$-m = -3$$

$$m = 3$$

COMPOSIÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU, CONHECIDAS AS RAÍZES

Considere a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0.$

Dividindo todos os termos por a $(a \neq 0)$, obtemos:

$$\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Como $-\frac{b}{a} = S$ e $\frac{c}{a} = P$, podemos escrever a equação desta maneira.

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Exemplos:

- Componha a equação do 2º grau cujas raízes são -2 e 7.
  Solução
  A soma das raízes corresponde a:
  $S = x_1 + x_2 = -2 + 7 = 5$
  O produto das raízes corresponde a:
  $P = x_1 \cdot x_2 = (-2) \cdot 7 = -14$
  A equação do 2º grau é dada por $x^2 - Sx + P = 0$, onde S=5 e P= -14.
  Logo, $x^2 - 5x - 14 = 0$ é a equação procurada.

- Formar a equação do 2º grau, de coeficientes racionais, sabendo-se que uma das raízes é $1+\sqrt{3}$.
  Solução
  Se uma equação do 2º grau, de coeficientes racionais, tem uma raiz $1+\sqrt{3}$, a outra raíz será $1-\sqrt{3}$.

$$\left(Lembre-se \quad \text{que}: \ x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \ \text{e} \ x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

Assim:

$$x_1 = 1+\sqrt{3} \qquad x_2 = 1-\sqrt{3}$$

$$S = (1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3}) \Rightarrow \qquad S = 2$$

$$P = (1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) \Rightarrow \qquad P = 1 - 3 = -2$$

Logo, $x^2 - 2x - 2 = 0$ é a equação procurada.

5. RAZÕES / PROPORÇÕES

Razões

Vamos considerar um carro de corrida com **4m** de comprimento e um kart com **2m** de comprimento. Para compararmos as medidas dos carros, basta dividir o comprimento de um deles pelo outro. Assim:

$\frac{4}{2} = 2$ (o tamanho do carro de corrida é duas vezes o tamanho do kart).

Podemos afirmar também que o kart tem a metade $\left(\frac{1}{2}\right)$ do comprimento do carro de corrida.
A comparação entre dois números racionais, através de uma divisão, chama-se **razão**.

A razão $\frac{1}{2}$ pode também ser representada por 1:2 e significa que cada metro do kart corresponde a 2m do carro de corrida.

Denominamos de **razão** entre dois números *a* e *b* (*b* diferente de zero) o quociente $\frac{a}{b}$ ou *a*:*b*.

A palavra **razão**, vem do latim *ratio*, e significa "divisão". Como no exemplo anterior, são diversas as situações em que utilizamos o conceito de razão. Exemplos:

- Dos 1200 inscritos num concurso, passaram 240 candidatos.
Razão dos candidatos aprovados nesse concurso:

$$240:1200 = \frac{240}{1200} \overset{:240}{=} \frac{1}{5}$$

(de cada 5 candidatos inscritos, 1 foi aprovado).

- Para cada 100 convidados, 75 eram mulheres.
Razão entre o número de mulheres e o número de convidados:

$$75:100 = \frac{75}{100} \overset{:25}{=} \frac{3}{4}$$

(de cada 4 convidados, 3 eram mulheres).

<u>Observações:</u>
1) A razão entre dois números racionais pode ser apresentada de três formas. Exemplo:

Razão entre 1 e 4: 1:4 ou $\frac{1}{4}$ ou 0,25.

2) A razão entre dois números racionais pode ser expressa com sinal negativo, desde que seus termos tenham sinais contrários. Exemplos:

A razão entre 1 e -8 é $\frac{-1}{8}$.

A razão entre $\frac{-1}{5}$ e $\frac{1}{4}$ é $\frac{\frac{-1}{5}}{\frac{1}{4}} = \frac{-4}{5}$.

Termos de uma razão
Observe a razão:

$a:b = \frac{a}{b}$ (lê-se "a está para b" ou "a para b").

Na razão *a:b* ou $\frac{a}{b}$, o número *a* é denominado **antecedente** e o número *b* é denominado **consequente**. Veja o exemplo:

3:5 = $\frac{3}{5}$ $\rightarrow$ O antecedente é 3. $\rightarrow$ O consequente é 5.

Leitura da razão: *3 está para 5* ou *3 para 5*.

Razões inversas

Considere as razões $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{4}$.

Observe que o produto dessas duas razões é igual a 1, ou seja, $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1$.

Nesse caso, podemos afirmar que $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{4}$ são **razões inversas**.

Duas razões são inversas entre si quando o produto delas é igual a 1.

Exemplo:

$\frac{3}{7}$ e $\frac{7}{3}$ são razões inversas, pois $\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = 1$.

Verifique que nas razões inversas o antecedente de uma é o consequente da outra, e vice-versa.

<u>Observações:</u>
1) Uma razão de antecedente zero não possui inversa.
2) Para determinar a razão inversa de uma razão dada, devemos permutar (trocar) os seus termos.

Exemplo: O inverso de $\frac{2}{5}$ é $\frac{5}{2}$.

Razões equivalentes

Dada uma razão entre dois números, obtemos uma razão equivalente da seguinte maneira:

Multiplicando-se ou dividindo-se os termos de uma razão por um mesmo número racional (diferente de zero), obtemos uma **razão equivalente**.

Exemplos:

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} \quad (\times 2) \quad \rightarrow \quad \frac{5}{6} \text{ e } \frac{10}{12}$$

são razões equivalentes.

$$\frac{15}{35} = \frac{3}{7} \quad (:5) \quad \rightarrow \quad \frac{15}{35} \text{ e } \frac{3}{7}$$

são razões equivalentes.

Razões entre grandezas da mesma espécie

O conceito é o seguinte:

Denomina-se razão entre grandezas de mesma espécie o quociente entre os números que expressam as medidas dessas grandezas numa mesma unidade.

Exemplos:

1) Calcular a razão entre a altura de dois anões, sabendo que o primeiro possui uma altura h_1= 1,20m e o segundo possui uma altura h_2= 1,50m. A razão entre as alturas h_1 e h_2 é dada por:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1{,}20\cancel{m}}{1{,}50\cancel{m}} = \frac{1{,}2}{1{,}5} = \frac{4}{5}$$

2) Determinar a razão entre as áreas das superfícies das quadras de vôlei e basquete, sabendo que a quadra de vôlei possui uma área de 162m² e a de basquete possui uma área de 240m².

Razão entre as área da quadra de vôlei e basquete: $\frac{A_v}{A_b} = \frac{162\cancel{m^2}}{240\cancel{m^2}} = \frac{162}{240} = \frac{27}{40}$.

Razões entre grandezas de espécies diferentes

O conceito é o seguinte:

> Para determinar a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, determina-se o quociente entre as medidas dessas grandezas. Essa razão deve ser acompanhada da notação que relaciona as grandezas envolvidas.

Exemplos:

1) Consumo médio:

- Beatriz foi de São Paulo a Campinas (92Km) no seu carro. Foram gastos nesse percurso 8 litros de combustível. Qual a razão entre a distância e o combustível consumido? O que significa essa razão? **Solução:**

Razão = $\frac{92\,km}{8\ell} = 11{,}5\,km/\ell$

Razão = $11{,}5\,km/\ell$ (lê-se "11,5 quilômetros por litro").

Essa razão significa que a cada litro consumido foram percorridos em média 11,5 km.

2) Velocidade média:

- Moacir fez o percurso Rio-São Paulo (450Km) em 5 horas. Qual a razão entre a medida dessas grandezas? O que significa essa razão?

Solução:

Razão = $\frac{450\,km}{5\,h} = 90\,km/h$

Razão = *90 km/h* (lê-se "90 quilômetros por hora").

Essa razão significa que a cada hora foram percorridos em média 90 km.

3) Densidade demográfica:

- O estado do Ceará no último censo teve uma população avaliada em 6.701.924 habitantes. Sua área é de 145.694 km². Determine a razão entre o número de habitantes e a área desse estado. O que significa essa razão?

Solução:

Razão = $\frac{6.701.924\,hab}{145.694\,km^2} = 46\ hab/km^2$

Razão = *46 hab/km²* (lê-se "46 habitantes por quilômetro quadrado").

Essa razão significa que em cada quilômetro quadrado existem em média 46 habitantes.

4) Densidade absoluta ou massa específica:

- Um cubo de ferro de 1cm de aresta tem massa igual a 7,8g. Determine a razão entre a massa e o volume desse corpo. O que significa essa razão?

Solução:

Volume = 1cm . 1cm . 1cm = 1cm³

Razão = $\frac{7{,}8\,g}{1\,cm^3} = 7{,}8\ g/cm^3$

Razão = *7,8 g/cm³* (lê-se "7,8 gramas por centímetro cúbico").

Essa razão significa que $1cm^3$ de ferro pesa 7,8g.

Proporções

Rogerião e Claudinho passeiam com seus cachorros. Rogerião pesa 120kg, e seu cão, 40kg. Claudinho, por sua vez, pesa 48kg, e seu cão, 16kg.

Observe a razão entre o peso dos dois rapazes:

: 24

$$\frac{120kg}{48kg} = \frac{5}{2}$$

: 24

Observe, agora, a razão entre o peso dos cachorros:

: 8

$$\frac{40kg}{16kg} = \frac{5}{2}$$

: 8

Verificamos que as duas razões são iguais. Nesse caso, podemos afirmar que a igualdade $\frac{120}{48} = \frac{40}{16}$ é uma**proporção**. Assim:

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Elementos de uma proporção

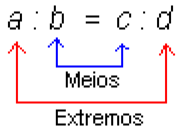
Dados quatro números racionais a, b, c, d, não-nulos, nessa ordem, dizemos que eles formam uma proporção quando a razão do 1º para o 2º for igual à razão do 3º para o 4º. Assim:

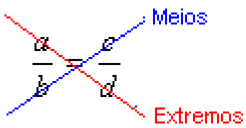
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ou *a:b=c:d*

(lê-se "*a* está para *b* assim como *c* está para *d*")

Os números *a, b, c* e *d* são os termos da proporção, sendo:

- *b* e *c* os **meios** da proporção.
- *a* e *d* os **extremos** da proporção.





Exemplo:

Dada a proporção $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$, temos:

Leitura: 3 está para 4 assim como 27 está para 36.

Meios: 4 e 27 *Extremos:* 3 e 36

Propriedade fundamental das proporções

Observe as seguintes proporções:

$\frac{3}{4} = \frac{30}{40}$ Produto dos meios = 4.30 = 120
Produto dos extremos = 3.40 = 120

$\frac{4}{9} = \frac{20}{45}$ Produto dos meios = 9.20 = 180
Produto dos extremos = 4.45 = 180

$\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$ Produto dos meios = 8.45 = 360
Produto dos extremos = 5.72 = 360

De modo geral, temos que:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c}$$

Daí podemos enunciar a propriedade fundamental das proporções:

Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Aplicações da propriedade fundamental

Determinação do termo desconhecido de uma proporção

Exemplos:

- Determine o valor de x na proporção:

$$\frac{5}{8} = \frac{15}{x}$$

Solução:

5 . x = 8 . 15 (aplicando a propriedade fundamental)
5 . x = 120

$$x = \frac{120}{5}$$

x = 24
Logo, o valor de *x* é 24.

- Determine o valor de x na proporção:

$$\frac{x-3}{2x+1} = \frac{4}{5}, \text{ sendo } x \neq \frac{-1}{2}.$$

Solução:

5 . (x-3) = 4 . (2x+1) (aplicando a propriedade fundamental)
5x - 15 = 8x + 4
5x - 8x = 4 + 15
-3x = 19
3x = -19

$x = \frac{-19}{3}$

Logo, o valor de *x* é $\frac{-19}{3}$.

- Os números 5, 8, 35 e x formam, nessa ordem, uma proporção. Determine o valor de x.

Solução:

$\frac{5}{8} = \frac{35}{x}$ (aplicando a propriedade fundamental)

5 . x = 8 . 35
5x = 280

$$x = \frac{280}{5}$$

x = 56
Logo, o valor de *x* é 56.

Resolução de problemas envolvendo proporções

Exemplo:

- Numa salina, de cada metro cúbico (m^3) de água salgada, são retirados 40 dm^3 de sal. Para obtermos 2 m^3 de sal, quantos metros cúbicos de água salgada são necessários?

Solução:

A quantidade de sal retirada é **proporcional** ao volume de água salgada.

Indicamos por x a quantidade de água salgada a ser determinada e armamos a proporção:

$$\frac{1m^3}{40dm^3} = \frac{\text{Quantidade de água salgada}}{\text{Quantidade de sal}}$$

$$\frac{1m^3}{40dm^3} = \frac{x}{2m^3}$$

Lembre-se que $40dm^3 = 0{,}04m^3$.

$$\frac{1m^3}{0{,}04m^3} = \frac{x}{2m^3}$$ (aplicando a propriedade fundamental)

$1 \cdot 2 = 0{,}04 \cdot x$

$0{,}04x = 2$

$$x = \frac{2}{0{,}04}$$

$x = 50\ m^3$

Logo, são necessários 50 m^3 de água salgada.

Quarta proporcional

Dados três números racionais *a, b* e *c*, não-nulos, denomina-se **quarta proporcional** desses números um número *x* tal que:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{x}}$$

Exemplo:

- Determine a quarta proporcional dos números 8, 12 e 6.

Solução: Indicamos por x a quarta proporcional e armamos a proporção:

$$\frac{8}{12} = \frac{6}{x}$$ (aplicando a propriedade fundamental)

$8 \cdot x = 12 \cdot 6$

$8 \cdot x = 72$

$$x = \frac{72}{8}$$

$x = 9$

Logo, a quarta proporcional é 9.

Proporção contínua

Considere a seguinte proporção: $\frac{9}{12} = \frac{12}{16}$

Observe que os seus meios são iguais, sendo, por isso, denominada **proporção contínua**. Assim:

Proporção contínua é toda a proporção que apresenta os meios iguais.

De um modo geral, uma proporção contínua pode ser representada por:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{b}{c}}$$

Terceira proporcional

Dados dois números naturais *a* e *b*, não-nulos, denomina-se **terceira proporcional** desses números o número *x* tal que:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{b}{x}}$$

Exemplo:
Determine a terceira proporcional dos números 20 e 10.
Solução
Indicamos por *x* a terceira proporcional e armamos a proporção:

$$\frac{20}{10} = \frac{10}{x}$$ (aplicando a propriedade fundamental)

$20 \cdot x = 10 \cdot 10$
$20x = 100$

$$x = \frac{100}{20}$$

$x = 5$
Logo, a terceira proporcional é 5.

Média geométrica ou média proporcional

Dada uma proporção contínua $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, o número *b* é denominado **média geométrica** ou **média proporcional**entre *a* e *c*. Exemplo:
- Determine a média geométrica positiva entre 5 e 20.
Solução:

$$\frac{5}{b} = \frac{b}{20}$$

$5 \cdot 20 = b \cdot b$
$100 = b^2$
$b^2 = 100$
$b = \sqrt{100}$
$b = 10$
Logo, a média geométrica positiva é 10.

Propriedades das proporções

1ª propriedade:

Numa proporção, a soma dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo, assim como a soma dos dois últimos está para o 4º (ou 3º).

Demonstração
Considere as proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad\qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Adicionando 1 a cada membro obtemos:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \qquad\qquad \frac{b}{a} + 1 = \frac{d}{c} + 1$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d} \qquad\qquad \frac{b}{a} + \frac{a}{a} = \frac{d}{c} + \frac{c}{c}$$

$$\boxed{\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}} \qquad\qquad \boxed{\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}}$$

Exemplo:

- Determine x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, sabendo que x+y=84.

Solução:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{3+4}{4}$$

Assim:

$$\frac{84}{y} = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \frac{84.4}{7} = 48$$

x+y = 84 => x = 84-y => x = 84-48 => x=36.

Logo, *x=36* e *y=48*.

2ª propriedade:

Numa proporção, a diferença dos dois primeiros termos está para o 2º (ou 1º) termo,
assim como a diferença dos dois últimos está para o 4º (ou 3º).

Demonstração

Considere as proporções:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

Subtraindo 1 a cada membro obtemos:

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$$

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{b} = \frac{c}{d} - \frac{d}{d}$$

$$\boxed{\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}}$$

$$\frac{b}{a} - 1 = \frac{d}{c} - 1$$

$$\frac{b}{a} - \frac{a}{a} = \frac{d}{c} - \frac{c}{c}$$

$$\frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$$ (Mult. os 2 membros por -1)

$$\boxed{\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}}$$

Exemplo:

- Sabendo-se que *x-y=18*, determine *x* e *y* na proporção $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$.

Solução:

Pela 2ª propriedade temos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x-y}{y} = \frac{5-2}{2} \Rightarrow \frac{18}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{18.2}{3} = 12$$

x-y = 18 => x=18+y => x = 18+12 => x=30.

Logo, x=30 e y=12.

3ª propriedade:

Numa proporção, a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes,
assim como cada antecedente está para o seu consequente.

Demonstração

Considere a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Permutando os meios, temos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Aplicando a 1ª propriedade, obtemos:

$$\frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}$$

Permutando os meios, finalmente obtemos:

$$\boxed{\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}}$$

4ª propriedade:

Numa proporção, a diferença dos antecedentes está para a diferença dos consequentes,
assim como cada antecedente está para o seu consequente.

Demonstração

Considere a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Permutando os meios, temos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Aplicando a 2ª propriedade, obtemos:

$$\frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$$

Permutando os meios, finalmente obtemos:

$$\boxed{\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d} = \frac{a}{b}}$$

Exemplo:

- Sabendo que *a-b* = *-24*, determine *a* e *b* na proporção $\frac{a}{5} = \frac{b}{7}$.

Solução:

Pela 4ª propriedade, temos que:

$$\frac{a-b}{5-7} = \frac{a}{5} = \frac{b}{7}$$

$$\frac{-24}{-2} = \frac{a}{5} \Rightarrow a = \frac{5.(-24)}{-2} \Rightarrow a = 60$$

$$\frac{-24}{-2} = \frac{b}{7} \Rightarrow b = \frac{7.(-24)}{-2} \Rightarrow b = 84$$

5ª propriedade:

Numa proporção, o produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para quadrado do seu consequente.

Demonstração

Considere a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Multiplicando os dois membros por $\frac{a}{b}$, temos:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Assim:

$$\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$$

Observação: a 5ª propriedade pode ser estendida para qualquer número de razões. Exemplo:

$$\frac{a\cdot c\cdot e}{b\cdot d\cdot f}=\frac{a^3}{b^3}=\frac{c^3}{d^3}=\frac{e^3}{f^3}$$

Proporção múltipla

Denominamos **proporção múltipla** uma série de razões iguais. Assim:

$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}$ é uma **proporção múltipla**.

Dada a série de razões iguais $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, de acordo com a 3ª e 4ª propriedade, podemos escrever:

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

$$\frac{a+c-e}{b+d-f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

$$\frac{a-c+e}{b-d+f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

$$\frac{a-c-e}{b-d-f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

6. REGRA DE TRÊS SIMPLES E COMPOSTA

Regra de três simples:

Regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvam quatro valores dos quais conhecemos três deles. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos.

Passos utilizada numa regra de três simples:

· Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

· Identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

· Montar a proporção e resolver a equação.

Exemplos:

a) Se 8m de tecido custam 156 reais, qual o preço de 12 m do mesmo tecido?

Tecido(m)	Preço
8	156
12	x

Observe que as grandezas são diretamente proporcionais, aumentando o metro do tecido aumenta na mesma proporção o preço a ser pago.

b) Um carro, à velocidade de 60km/h, faz certo percurso em 4 horas. Se a velocidade do carro fosse de 80km/h, em quantas horas seria feito o mesmo percurso?

Regra de Três Composta:

A regra de três composta é utilizada em problemas com mais de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
Exemplo:

a) Em 8 horas, 20 caminhões descarregam 160m³ de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar 125m³?

Horas	Caminhões	Volume
8	20	160
5	x	125

MATEMÁTICA FINANCEIRA:

7. PORCENTAGENS

Porcentagens

As frações (ou razões) que possuem denominadores (o número de baixo da fração) iguais a 100, são conhecidas por **razões centesimais** e podem ser representadas pelo símbolo "%".
O símbolo "%" é lido como "**por cento**". "5%" lê-se "5 por cento". "25%" lê-se "25 por cento".
O símbolo "%" significa **centésimos**, assim "5%" é uma outra forma de se escrever **0,05**, $\frac{5}{100}$ ou $\frac{1}{20}$ por exemplo.
Veja as seguintes razões:
$\frac{1}{100}, \frac{17}{100}, \frac{41}{100}, \frac{70}{100}$
Podemos representá-las na sua forma decimal por:
0,01; 0,17; 0,41; 0,70
E também na sua forma de porcentagens por:
1%, 17%, 41%, 70%

Como calcular um valor percentual de um número?
Agora que temos uma visão geral do que é porcentagem, como calcular quanto é 25% de 200?
Multiplique 25 por 200 e divida por 100:
$$\frac{25 \cdot 200}{100} = 50$$
Se você achar mais fácil, você pode simplesmente multiplicar 25% na sua forma decimal, que é 0,25 por 200:

$0{,}25 \cdot 200 = 50$

Assim temos:

1. 4% de 32 = 0,04 . 32 = 1,28
2. 15% de 180 = 0,15 . 180 = 27
3. 18% de 150 = 0,18 . 150 = 27
4. 35% de 126 = 0,35 . 126 = 44,1
5. 100% de 715 = 1,00 . 715 = 715
6. 115% de 60 = 1,15 . 60 = 69
7. 200% de 48 = 2,00 . 48 = 96

Repare que no quinto item, 100% de 715 corresponde ao próprio 715, isto ocorre porque 100% representa o todo, ocorre porque 100% é a razão de 100 para 100 (100 : 100) que é igual a 1. Por isto 100% de um número **x** é o próprio número **x**, já que o estaremos multiplicando por 1, para sabermos o valor da porcentagem.

Analisando os itens de 1 a 4, podemos também perceber que quando o percentual é menor 100%, o número resultante será menor que o número original. Nos itens 6 e 7 percebemos que o resultado é maior que o número original. Isto ocorre porque o percentual é maior que 100%.

Nos itens 2 e 3 observamos que 15% de 180 é igual a 18% de 150. **a**% de **b** é igual a **b**% de **a**. Isto é devido à propriedade comutativa da multiplicação que diz que **a . b = b . a**.

Como transformamos uma razão ou fração em porcentagem?

Vimos que razões centesimais são um tipo especial de **razão**, cujo consequente é igual a cem e podem facilmente ser expressas na forma de porcentagem, simplesmente se eliminando o consequente ou denominador cem e inserindo o símbolo de porcentagem após o antecedente ou numerador. Por exemplo:

$$\begin{cases} \frac{3}{100} \Rightarrow 3\% \\ \\ 15 : 100 \Rightarrow 15\% \end{cases}$$

Mas como transformamos a razão **3 : 15** em porcentagem?

Simplesmente realizando a divisão, encontrando assim o valor da razão, multiplicando-o por 100 e inserindo o símbolo de porcentagem à sua direita, ou seja, multiplicamos por **100%**:

$3 : 15 \Rightarrow 0{,}2 \Rightarrow 20\%$

Talvez você não tenha percebido, mas podemos utilizar a transformação de uma razão em porcentagem para calcular quantos por cento um número é de outro. Neste nosso exemplo **3** é **20%** de **15**.

Dezoito é quantos por cento de quarenta e cinco?

$\frac{18}{45} \Rightarrow 0{,}4 \Rightarrow 0{,}4 \cdot 100\% \Rightarrow 40\%$

Para que serve o cálculo da porcentagem?

Razões são utilizadas para podermos comparar grandezas e em sendo a porcentagem uma razão, é exatamente esta a utilidade da porcentagem.

Digamos que a população de uma cidade **A** cresceu de 100 mil para 125 mil em dez anos. Sabemos também que no mesmo período, a população da cidade **B** passou de 40 mil para 50 mil habitantes. Qual das cidades teve um aumento populacional maior?

Aumento populacional da cidade **A** em porcentagem:

$(\frac{125000}{100000} - 1) \cdot 100\% = 25\%$

Aumento populacional da cidade **B** em porcentagem:

$(\frac{50000}{40000} - 1) \cdot 100\% = 25\%$

Segundos os cálculos realizados acima, percebemos que embora a população da cidade **A** seja muito maior que a outra, o aumento percentual das duas populações foi o mesmo.

Veja também que a razão da população atual para a população de 10 anos atrás, de ambas as cidades é a mesma, uma outra prova de que o crescimento foi proporcionalmente o mesmo:

125000 : 100000 = 50000 : 40000 = 1,25

8. JUROS SIMPLES

Juros

Juros representam a remuneração do Capital empregado em alguma atividade produtiva. Os juros podem ser capitalizados segundo dois regimes: simples ou compostos.

> **JUROS SIMPLES**: o juro de cada intervalo de tempo sempre é calculado sobre o capital inicial emprestado ou aplicado.
> **JUROS COMPOSTOS**: o juro de cada intervalo de tempo é calculado a partir do saldo no início de correspondente intervalo. Ou seja: o juro de cada intervalo de tempo é incorporado ao capital inicial e passa a render juros também.

O **juro** é a remuneração pelo empréstimo do dinheiro. Ele existe porque a maioria das pessoas prefere o consumo imediato, e está disposta a pagar um preço por isto. Por outro lado, quem for capaz de esperar até possuir a quantia suficiente para adquirir seu desejo, e neste ínterim estiver disposta a emprestar esta quantia a alguém, menos paciente, deve ser recompensado por esta abstinência na proporção do **tempo** e **risco**, que a operação envolver. O tempo, o risco e a quantidade de dinheiro disponível no mercado para empréstimos definem qual deverá ser a remuneração, mais conhecida como**taxa de juros**.

Quando usamos juros simples e juros compostos?

A maioria das operações envolvendo dinheiro utiliza **juros compostos**. Estão incluídas: compras a médio e longo prazo, compras com cartão de crédito, empréstimos bancários, as aplicações financeiras usuais como Caderneta de Poupança e aplicações em fundos de renda fixa, etc. Raramente encontramos uso para o regime de juros simples: é o caso das operações de curtíssimo prazo, e do processo de desconto simples de duplicatas.

Taxa de juros

A taxa de juros indica qual remuneração será paga ao dinheiro emprestado, para um determinado período. Ela vem normalmente expressa da forma percentual, em seguida da especificação do período de tempo a que se refere:
8 % a.a. **-** (a.a. significa ao ano).
10 % a.t. - (a.t. significa ao trimestre).
Outra forma de apresentação da taxa de juros é a unitária, que é igual a taxa percentual dividida por 100, sem o símbolo %:
0,15 a.m. **-** (a.m. significa ao mês).
0,10 a.q. - (a.q. significa ao quadrimestre)

JUROS SIMPLES

O regime de juros será simples quando o percentual de juros incidir apenas sobre o valor principal. Sobre os juros gerados a cada período não incidirão novos juros. Valor Principal ou simplesmente principal é o valor inicial emprestado ou aplicado, antes de somarmos os juros. Transformando em fórmula temos:

$$\boxed{J = C \cdot i \cdot n}$$

Onde:

J = juros
C = principal (capital)
i = taxa de juros
n = número de períodos

Exemplo: Temos uma dívida de R$ 1000,00 que deve ser paga com juros de 8% a.m. pelo regime de juros simples e devemos pagá-la em 2 meses. Os juros que pagarei serão:
J = 1000 x 0.08 x 2 = **160**

Ao somarmos os juros ao valor principal temos o **montante**.

Montante = Principal + Juros

Montante = Principal + (Principal x Taxa de juros x Número de períodos)

M = C . (1 + (i . n))

Exemplo: Calcule o montante resultante da aplicação de R$70.000,00 à taxa de 10,5% a.a. durante 145 dias.

SOLUÇÃO:

M = C . (1 + (i.n))

M = 70000 [1 + (10,5/100).(145/360)] = R$72.960,42

Observe que expressamos a taxa **i** e o período **n**, na mesma unidade de tempo, ou seja, anos. Daí ter dividido 145 dias por 360, para obter o valor equivalente em anos, já que um ano comercial possui 360 dias.

Exercícios sobre juros simples:

1) Calcular os juros simples de R$ 1200,00 a 13 % a.t. por 4 meses e 15 dias.

0.13 / 6 = 0.02167

logo, 4m15d = 0.02167 x 9 = 0.195

j = 1200 x 0.195 = 234

2 - Calcular os juros simples produzidos por R$40.000,00, aplicados à taxa de 36% a.a., durante 125 dias.

Temos: J = C.i.n

A taxa de 36% a.a. equivale a 0,36/360 dias = 0,001 a.d.

Agora, como a taxa e o período estão referidos à mesma unidade de tempo, ou seja, dias, poderemos calcular diretamente:

J = 40000.0,001.125 = R$5000,00

3 - Qual o capital que aplicado a juros simples de 1,2% a.m. rende R$3.500,00 de juros em 75 dias?

Temos imediatamente: J = C.i.n ou seja: 3500 = C.(1,2/100).(75/30)

Observe que expressamos a taxa **i** e o período **n** em relação à mesma unidade de tempo, ou seja, meses. Logo,

3500 = C. 0,012 . 2,5 = C . 0,030; Daí, vem:

C = 3500 / 0,030 = R$116.666,67

4 - Se a taxa de uma aplicação é de 150% ao ano, quantos meses serão necessários para dobrar um capital aplicado através de capitalização simples?

Objetivo: M = 2.C

Dados: i = 150/100 = 1,5

Fórmula: M = C (1 + i.n)

Desenvolvimento:

2P = C (1 + 1,5 n)

2 = 1 + 1,5 n

n = 2/3 ano = 8 meses

9. JUROS COMPOSTOS

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia-a-dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte.

Chamamos de capitalização o momento em que os juros são incorporados ao principal.

Após três meses de capitalização, temos:

1º mês: **M =C.(1 + i)**

2º mês: o principal é igual ao montante do mês anterior: **M = C x (1 + i) x (1 + i)**

3º mês: o principal é igual ao montante do mês anterior: **M = C x (1 + i) x (1 + i) x (1 + i)**

Simplificando, obtemos a fórmula:

$$\boxed{M = C \cdot (1 + i)^n}$$

Importante: a taxa **i** tem que ser expressa na mesma medida de tempo de **n**, ou seja, taxa de juros ao mês para n meses.

Para calcularmos apenas os juros basta diminuir o principal do montante ao final do período:

$$\boxed{J = M - C}$$

Exemplo:

Calcule o montante de um capital de R$6.000,00, aplicado a juros compostos, durante 1 ano, à taxa de 3,5% ao mês.

(use *log 1,035=0,0149* e *log 1,509=0,1788*)

Resolução:

C = R$6.000,00

t = 1 ano = 12 meses

i = 3,5 % a.m. = 0,035

M = ?

Usando a fórmula $M=C.(1+i)^n$, obtemos:

$M = 6000.(1+0,035)^{12} = 6000. (1,035)^{12}$

Fazendo $x = 1,035^{12}$ e aplicando logaritmos, encontramos:

$\log x = \log 1,035^{12} \Rightarrow \log x = 12 \log 1,035 \Rightarrow \log x = 0,1788 \Rightarrow x = 1,509$

Então M = 6000.1,509 = 9054.

Portanto o montante é R$9.054,00

Relação entre juros e progressões

No regime de juros simples:

$M(n) = C + n r C$

No regime de juros compostos:

$M(n) = C . (1 + r)^n$

Portanto:

- num regime de capitalização **a juros simples** o saldo cresce em **progressão aritmética**
- num regime de capitalização **a juros compostos** o saldo cresce em **progressão geométrica**

TAXAS EQUIVALENTES

Duas taxas i_1 e i_2 são equivalentes, se aplicadas ao mesmo Capital **P** durante o mesmo período de tempo, através de diferentes períodos de capitalização, produzem o mesmo montante final.

- Seja o capital **P** aplicado por um ano a uma taxa anual i_a .
- O montante **M** ao final do período de 1 ano será igual a $M = P(1 + i_a)$
- Consideremos agora, o mesmo capital **P** aplicado por 12 meses a uma taxa mensal i_m .

- O montante **M’** ao final do período de 12 meses será igual a $M' = P(1 + i_m)^{12}$.
  Pela definição de taxas equivalentes vista acima, deveremos ter **M = M’**.
  Portanto, $P(1 + i_a) = P(1 + i_m)^{12}$
  Daí concluímos que $\mathbf{1 + i_a = (1 + i_m)^{12}}$
  Com esta fórmula podemos calcular a taxa anual equivalente a uma taxa mensal conhecida.
  Exemplos:
  1 - Qual a taxa anual equivalente a 8% ao semestre?
  Em um ano temos dois semestres, então teremos: $1 + i_a = (1 + i_s)^2$
  $1 + i_a = 1{,}08^2$
  $i_a = 0{,}1664 = 16{,}64\%$ a.a.

  2 - Qual a taxa anual equivalente a 0,5% ao mês?
  $1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$
  $1 + i_a = (1{,}005)^{12}$
  $i_a = 0{,}0617 = 6{,}17\%$ a.a.

TAXAS NOMINAIS

A taxa nominal é quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital não coincide com aquele a que a taxa está referida. Alguns exemplos:
- 340% ao semestre com capitalização mensal.
- 1150% ao ano com capitalização mensal.
- 300% ao ano com capitalização trimestral.

Exemplo:
Uma taxa de 15 % a.a., capitalização mensal, terá 16.08 % a.a. como taxa efetiva:
$15/12 = 1{,}25$ $\quad\quad$ $1{,}0125^{12} = 1{,}1608$

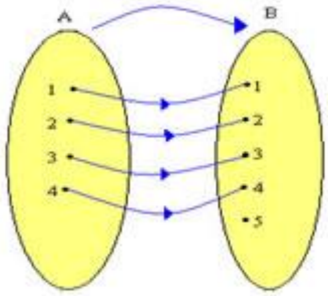
TAXAS EFETIVAS

A taxa Efetiva é quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital coincide com aquele a que a taxa está referida. Alguns exemplos:
- 140% ao mês com capitalização mensal.
- 250% ao semestre com capitalização semestral.
- 1250% ao ano com capitalização anual.

Taxa Real: é a taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período da operação.

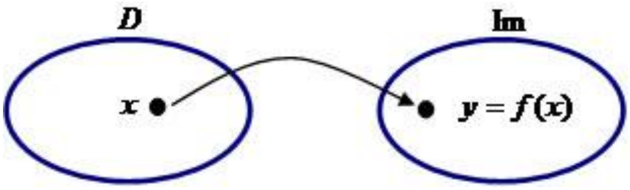
10. FUNÇÕES

Uma relação estabelecida entre dois conjuntos A e B, onde exista uma associação entre cada elemento de A com um único de B através de uma lei de formação é considerada uma função. Observe o exemplo:



O estudo das funções se apresenta em vários segmentos, de acordo com a relação entre os conjuntos podemos obter inúmeras leis de formação. Dentre os estudos das funções temos: função do 1º grau, função do 2º grau, função exponencial, função modular, função trigonométrica, função logarítmica, função polinomial. Cada função possui uma propriedade e é definida por leis generalizadas. As funções possuem representações geométricas no plano cartesiano, as relações entre pares ordenados (x,y) são de extrema importância no estudo dos gráficos de funções, pois a análise dos gráficos demonstram de forma geral as soluções dos problemas propostos com o uso de relações de dependência, especificadamente, as funções.

As funções possuem um conjunto denominado domínio e outro chamado de imagem da função, no plano cartesiano o eixo x representa o domínio da função, enquanto o eixo y representa os valores obtidos em função de x, constituindo a imagem da função.



Um exemplo de relação de função pode ser expresso por uma lei de formação que relaciona: o preço a ser pago em função da quantidade de litros de combustível abastecidos. Considerando o preço da gasolina igual a R$ 2,50, temos a seguinte lei de formação: ***f(x) = 2,50*x***, onde f(x): preço a pagar e x: quantidade de litros. Observe a tabela abaixo:

Litros (x)	Preço a pagar em R$ ($f(x)$)
1	2,50
2	5,00
3	7,50
4	10,00
5	12,50
6	15,00
7	17,50
8	20,00
9	22,50
10	25,00

Verifique que para cada valor de x temos uma representação em f(x), esse modelo é um típico exemplo de função do 1º grau.

Função de 1º Grau

Análise da função de 1° grau através do estudo algébrico dessas funções e do estudo dos gráficos e elementos que constituem esse conceito. Essa seção aborda conceitos de cálculos algébricos, representações gráficas, interpretações de um gráfico e estudo das equações e inequações.

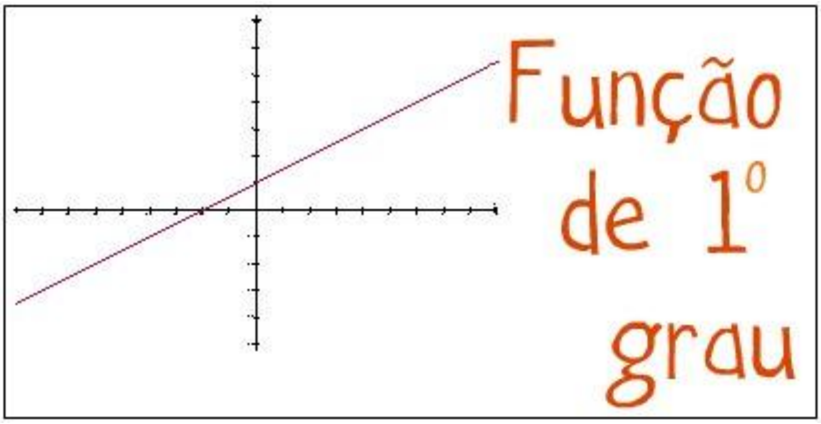


Gráfico de uma função do 1° grau.

O estudo das funções é importante, uma vez que elas podem ser aplicadas em diferentes circunstâncias: nas engenharias, no cálculo estatístico de animais em extinção, etc.

O significado de função é intrínseco à matemática, permanecendo o mesmo para qualquer tipo de função, seja ela do 1° ou do 2° grau, ou uma função exponencial ou logarítmica. Portanto, a função é utilizada para relacionar valores numéricos de uma determinada expressão algébrica de acordo com cada valor que a variável x assume.

Sendo assim, a função do 1° grau relacionará os valores numéricos obtidos de expressões algébricas do tipo (**ax + b**), constituindo, assim, a função **f(x) = ax + b.**

Note que para definir a função do 1° grau, basta haver uma expressão algébrica do 1° grau. Como dito anteriormente, o objetivo da função é relacionar para cada valor de x um valor para o f(x). Vejamos um exemplo para a função f(x)= x – 2.

x = 1, temos que f(1) = 1 – 2 = –1
x = 4, temos que f(4) = 4 – 2 = 2

Note que os valores numéricos mudam conforme o valor de x é alterado, sendo assim obtemos diversos pares ordenados, constituídos da seguinte maneira: (x, f(x)). Veja que para cada coordenada x, iremos obter uma coordenada f(x). Isso auxilia na construção de gráficos das funções.

Portanto, para que o estudo das funções do 1° grau seja realizado com sucesso, compreenda bem a construção de um gráfico e a manipulação algébrica das incógnitas e dos coeficientes

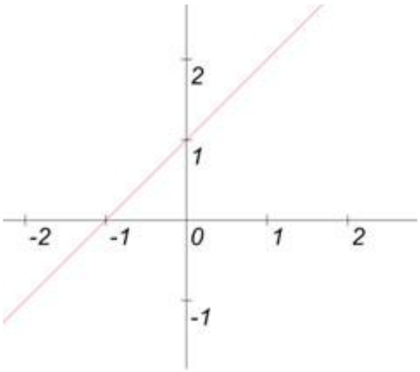
Coeficiente Linear de uma Função do 1º Grau

As funções do tipo ***f(x) = y = ax + b***, com a e b números reais e ***a ≠ 0***, são consideradas do 1º grau. Ao serem representadas no plano cartesiano, constituem uma reta crescente ou decrescente. E no caso de ***a = 0***, a função é chamada de constante.

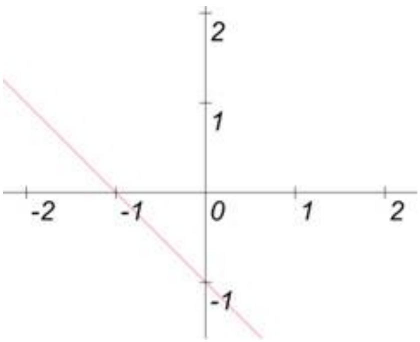
Uma função possui pontos considerados essenciais para a composição correta de seu gráfico, e um desses pontos é dado pelo coeficiente linear da reta representado na função pela letra b, que indica por qual ponto numérico a reta intercepta o eixo das ordenadas (y).

Nas funções a seguir, observe o valor numérico do coeficiente linear e o gráfico representativo da função:

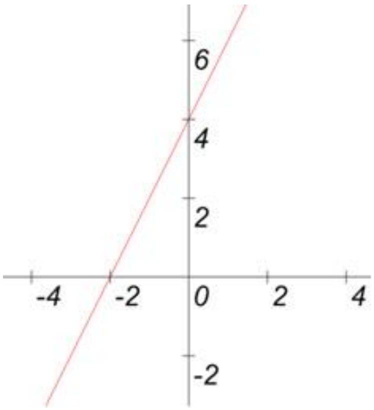
y = x + 1
b = 1



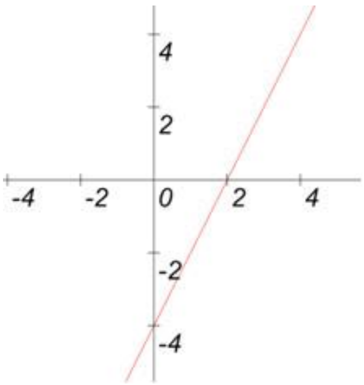
y = –x – 1
b = –1



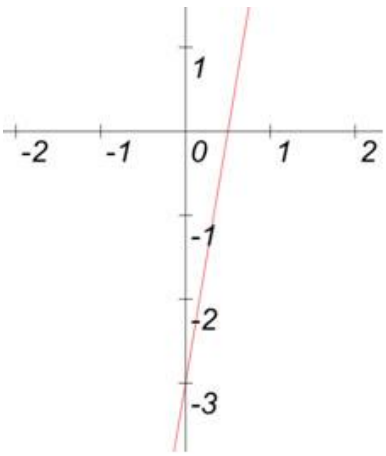
y = 2x + 4
b = 4



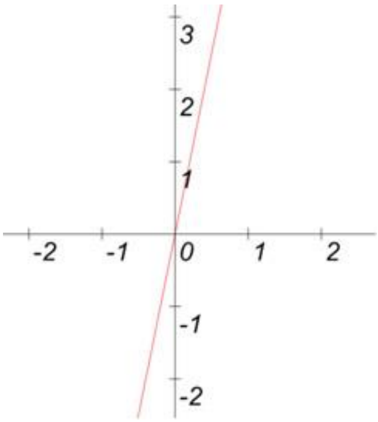
y = 2x – 4
b = – 4



y = 6x – 3
b = – 3



y = 5x
b = 0



Função de 2º Grau

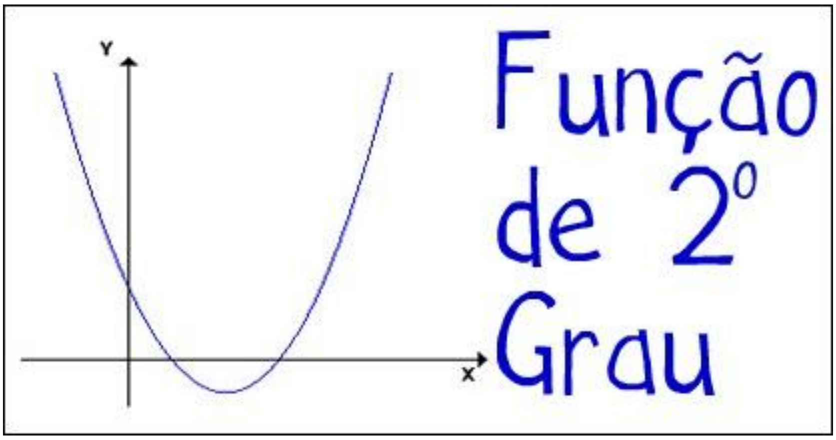


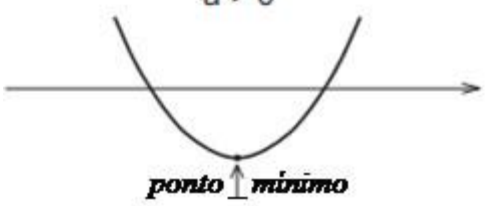
Gráfico da Função de 2º Grau

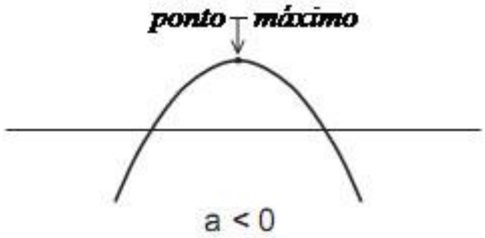
Toda função estabelecida pela lei de formação f(x) = ax² + bx + c, com a, b e c números reais e a ≠ 0, é denominada função do 2º grau. Generalizando temos:

$$\mathbf{f : R \rightarrow R \text{ tal que } f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a \in R^*}, b \in R, c \in R.$$

As funções do 2º grau possuem diversas aplicações no cotidiano, principalmente em situações relacionadas à Física envolvendo movimento uniformemente variado, lançamento oblíquo, etc.; na Biologia, estudando o processo de fotossíntese das plantas; na Administração e Contabilidade relacionando as funções custo, receita e lucro; e na Engenharia Civil presente nas diversas construções.

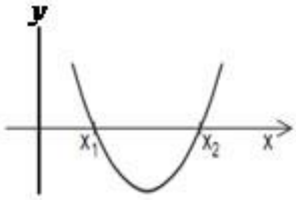
A representação geométrica de uma função do 2º grau é dada por uma parábola, que de acordo com o sinal do coeficiente **a** pode ter concavidade voltada para cima ou para baixo.



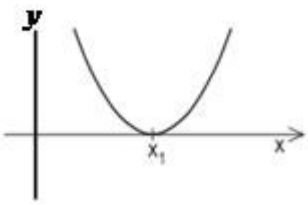


As raízes de uma função do 2º grau são os pontos onde a parábola intercepta o eixo x. Dada a função f(x) = ax² + bx + c, se f(x) = 0, obtemos uma equação do 2º grau, ax² + bx + c = 0, dependendo do valor do discriminante ? (delta), podemos ter as seguintes situações gráficas:

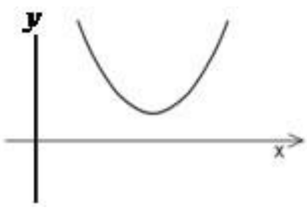
? > 0, a equação possui duas raízes reais e diferentes. A parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos.



? = 0, a equação possui apenas uma raiz real. A parábola intercepta o eixo x em um único ponto.

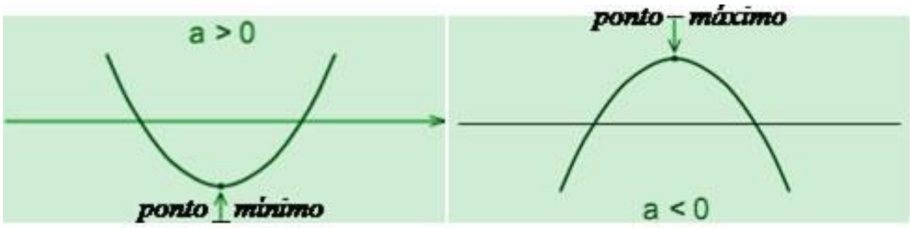


? < 0, a equação não possui raízes reais. A parábola não intercepta o eixo x.



Máximo e Mínimo

Toda expressão na forma y = ax² + bx + c ou f(x) = ax² + bx + c com a, b e c números reais, sendo a ≠ 0, é denominada função do 2º grau. A representação gráfica de uma função do 2º grau é dada através de uma parábola, que pode ter a concavidade voltada para cima ou para baixo. Veja:



Para determinarmos o ponto máximo e o ponto mínimo de uma função do 2º grau basta calcular o vértice da parábola utilizando as seguintes expressões matemáticas:

$$Xv = -\frac{b}{2a}$$

$$Yv = -\frac{\Delta}{4a}$$

O ponto máximo e o ponto mínimo podem ser atribuídos a várias situações presentes em outras ciências, como Física, Biologia, Administração, Contabilidade entre outras.

Física: movimento uniformemente variado, lançamento de projéteis.
Biologia: na análise do processo de fotossíntese.
Administração: Estabelecendo pontos de nivelamento, lucros e prejuízos.

Exemplos

1 – Na função y = x² - 2x +1, temos que a = 1, b = -2 e c = 1. Podemos verificar que
a > 0, então a parábola possui concavidade voltada para cima possuindo ponto mínimo. Vamos calcular as coordenadas do vértice da parábola.

$$Yv = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$Yv = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$Yv = -\frac{(-2)^2 - 4*1*1}{4*1}$$

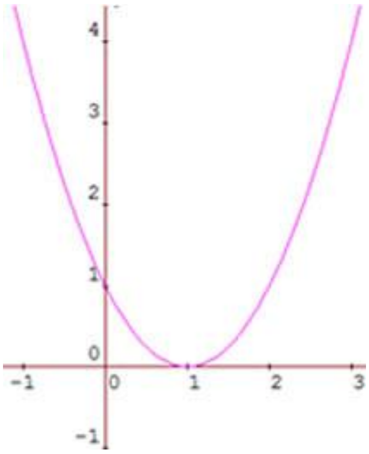
$$Yv = -\frac{4-4}{4}$$

$$Yv = 0$$

$$Xv = -\frac{b}{2a}$$

$$Xv = -\frac{(-2)}{2*1}$$

$$Xv = 1$$

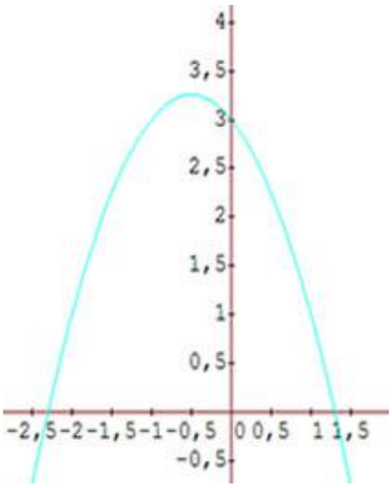


As coordenadas do vértice são (1, 0).

2 – Dada a função y = $-x^2 -x + 3$, temos que a = -1, b = -1 e c = 3. Temos a < 0, então a parábola possui concavidade voltada para baixo tendo um ponto máximo. Os vértices da parábola podem ser calculados da seguinte maneira:

$$Yv = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
$$Yv = -\frac{(-1)^2 - 4*(-1)*(3)}{4*(-1)}$$
$$Yv = -\frac{1+12}{-4}$$
$$Yv = -\frac{13}{-4}$$
$$Yv = 3{,}25$$

$$Xv = -\frac{b}{2a}$$
$$Xv = -\frac{-1}{2*(-1)}$$
$$Xv = -\frac{-1}{-2}$$
$$Xv = -\frac{1}{2}$$
$$Xv = -0{,}5$$



As coordenadas do vértice são (-0,5; 3,25).

Concluímos que o vértice da parábola deve ser considerado um ponto notável, em razão da sua importância na construção do gráfico de uma função do 2º grau e sua relação com os pontos de valor máximo e mínimo.

Raízes da Função de 2º Grau

Determinar a raiz de uma função é calcular os valores de x que satisfazem a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, que podem ser encontradas através do Teorema de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Número de raízes reais da função do 2º grau

Dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, existirão três casos a serem considerados para a obtenção do número de raízes. Isso dependerá do valor do discriminante Δ.

1º caso → Δ > 0: A função possui duas raízes reais e distintas, isto é, diferentes.

2º caso → Δ = 0: A função possui raízes reais e iguais. Nesse caso, dizemos que a função possui uma única raiz.

3º caso → Δ < 0: A função não possui raízes reais.

Soma e produto das raízes

Seja a equação, $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

Se $\Delta \geq 0$, a soma das raízes dessa equação é dada por $-\frac{b}{a}$ e o produto das raízes por $\frac{c}{a}$. De fato, x' e x'' são as raízes da equação, por isso temos:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Soma das raízes

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-b - b}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-2b}{2a}$$

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

Produto das raízes

$$x' * x'' = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})}{2a} * \frac{(-b - \sqrt{\Delta})}{2a}$$

Efetuando a multiplicação, temos:

$$x' * x'' = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

Substituindo Δ por b² – 4ac, temos:

$$x' * x'' = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$x' * x'' = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$x' * x'' = \frac{4ac}{4a^2}$$

Após a simplificação, temos:

$$x' * x'' = \frac{c}{a}$$

Função Exponencial

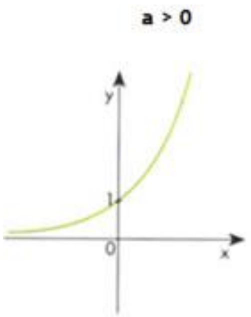
Toda relação de dependência, em que uma incógnita depende do valor da outra, é denominada função. A função denominada como exponencial possui essa relação de dependência e sua principal característica é que a parte variável representada por **x** se encontra no expoente. Observe:

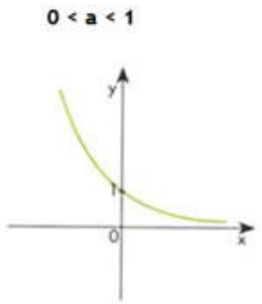
$y = 2^{x}$
$y = 3^{x+4}$
$y = 0{,}5^{x}$
$y = 4^{x}$

A lei de formação de uma função exponencial indica que a base elevada ao expoente x precisa ser maior que zero e diferente de um, conforme a seguinte notação:

f: R→R tal que $y = a^{x}$, sendo que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Uma função pode ser representada através de um gráfico, e no caso da exponencial, temos duas situações: a > 0 e 0 < a < 1. Observe como os gráficos são constituídos respeitando as condições propostas:





Uma função exponencial é utilizada na representação de situações em que a taxa de variação é considerada grande, por exemplo, em rendimentos financeiros capitalizados por juros compostos, no decaimento radioativo de substâncias químicas, desenvolvimento de bactérias e micro-organismos, crescimento populacional entre outras situações. As funções exponenciais devem ser resolvidas utilizando, se necessário, as regras envolvendo potenciação.

Vamos apresentar alguns exemplos envolvendo o uso de funções exponenciais.

Exemplo 1

(Unit-SE) Uma determinada máquina industrial se deprecia de tal forma que seu valor, t anos após a sua compra, é dado por $v(t) = v_0 * 2^{-0,2t}$, em que v_0 é uma constante real. Se, após 10 anos, a máquina estiver valendo R$ 12 000,00, determine o valor que ela foi comprada.
Temos que v(10) = 12 000, então:

$v(10) = v0 * 2^{-0,2*10}$

$12\,000 = v0 * 2^{-2}$

12 000 = v0 * 1/4

12 000 : 1/ 4 = v0

v0 = 12 000 * 4

v0 = 48 000

A máquina foi comprada pelo valor de R$ 48 000,00.

Exemplo 2

(EU-PI) Suponha que, em 2003, o PIB (Produto Interno Bruto) de um país seja de 500 bilhões de dólares. Se o PIB crescer 3% ao ano, de forma cumulativa, qual será o PIB do país em 2023, dado em bilhões de dólares? Use $1{,}03^{20} = 1{,}80$.

Temos a seguinte função exponencial

$P(x) = P0 * (1 + i)^t$

$P(x) = 500 * (1 + 0{,}03)^{20}$

$P(x) = 500 * 1{,}03^{20}$

P(x) = 500 * 1,80

P(x) = 900

O PIB do país no ano de 2023 será igual a R$ 900 bilhões.

Função Logarítmica

Toda função definida pela lei de formação $f(x) = \log_a x$, com $a \neq 1$ e $a > 0$ é denominada função logarítmica de base **a**. Nesse tipo de função o domínio é representado pelo conjunto dos números reais maiores que zero e o contradomínio, o conjunto dos reais.

Exemplos de funções logarítmicas:

$f(x) = \log_2 x$
$f(x) = \log_3 x$
$f(x) = \log_{1/2} x$
$f(x) = \log_{10} x$
$f(x) = \log_{1/3} x$
$f(x) = \log_4 x$
$f(x) = \log_2 (x - 1)$
$f(x) = \log_{0,5} x$

Determinando o domínio da função logarítmica

Dada a função $f(x) = {}_{(x-2)}(4 - x)$, temos as seguintes restrições:

1) $4 - x > 0 \rightarrow -x > -4 \rightarrow x < 4$
2) $x - 2 > 0 \rightarrow x > 2$
3) $x - 2 \neq 1 \rightarrow x \neq 1+2 \rightarrow x \neq 3$

Realizando a intersecção das restrições 1, 2 e 3, temos o seguinte resultado: ***$2 < x < 3$ e $3 < x < 4$***.

Dessa forma, ***D = {x ? R / $2 < x < 3$ e $3 < x < 4$}***

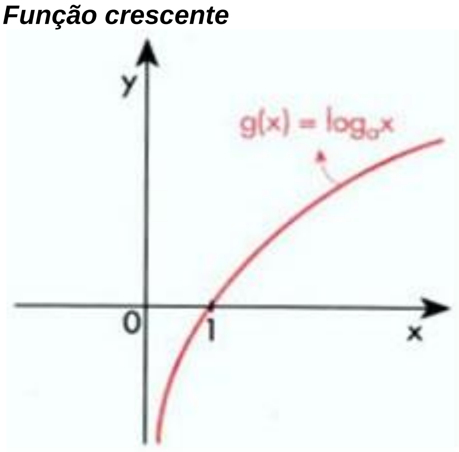
Gráfico de uma função logarítmica

Para a construção do gráfico da função logarítmica devemos estar atentos a duas situações:

? $a > 1$

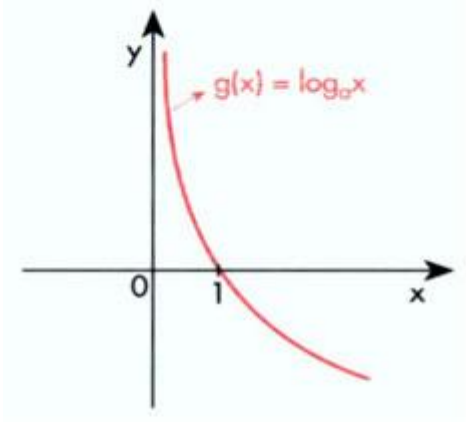
? $0 < a < 1$

Para $a > 1$, temos o gráfico da seguinte forma:
Função crescente



Para 0 < a < 1, temos o gráfico da seguinte forma:

Função decrescente



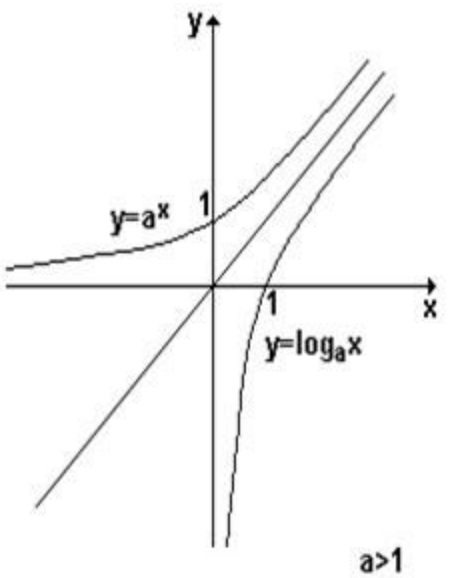
Características do gráfico da função logarítmica y = $\log_a x$

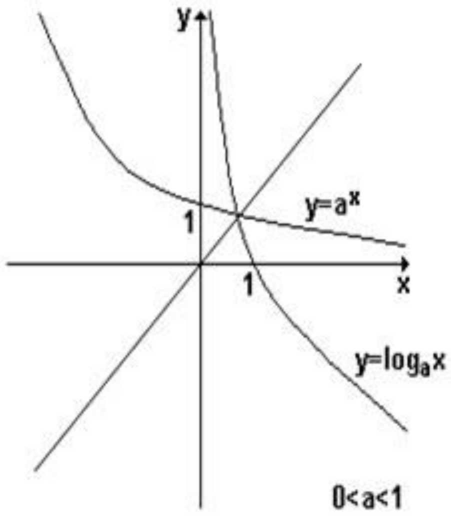
O gráfico está totalmente à direita do eixo y, pois ela é definida para x > 0.

Intersecta o eixo das abscissas no ponto (1,0), então a raiz da função é x = 1.

Note que y assume todos as soluções reais, por isso dizemos que a Im(imagem) = R.

Através dos estudos das funções logarítmicas, chegamos à conclusão de que ela é uma função inversa da exponencial. Observe o gráfico comparativo a seguir:





Podemos notar que (x,y) está no gráfico da função logarítmica se o seu inverso (y,x) está na função exponencial de mesma base.

11. PA / PG

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Progressão Aritméticas (PA)

É uma seqüência de números reais onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior mais uma constante (chamada razão).
Exemplos:
Sendo a1 = 1 e a razão (r) = 2 então (a1 é o primeiro termo a2 o segundo termo e assim por diante)
a2 = a1 + r   a2 = 1 + 2 = 3
a3 = a2 + r   a3 = 3 + 2 = 5
a4 = a3 + r   a4 = 5 + 2 = 7
an = an-1 + r (representação de um termo qualquer)
Assim a P.A. será (1, 3, 5, 7......)
Para calcularmos a razão de uma P.A. efetuamos a diferença entre um termo qualquer e seu anterior.
Exemplos:
Dada a P.A. (1, 4, 7, 10....)
r = 4 - 1 = 3; r = 7 - 4 = 3; r = 10 - 7 = 3

Termo Geral de uma P.A

Para calcularmos qualquer termo de uma P.A. usamos a fórmula seguinte:

an = a1 + (n - 1)r

an = representa o termo procurado.
a1 = representa o primeiro termo da P.A
n = representa o número de termos.
r = representa a razão da P.A.

Exemplos:
1. Calcule o sétimo termo da P.A (1, 6, 11, ...)
a7 = ? n = 7 a1 = 1 r = 6 - 1 = 5
an = a1 + (n - 1)r
a7 = 1 + (7 - 1)5
a7 = 1 + (6)5
a7 = 1 + 30
a7 = 31
Logo o sétimo termo desta P.A é 31.

2. Calcule o número de termos de uma P.A sabendo que a1 = - 14, an = 19 e r = 3.
an = 19 a1 = -14 r = 3 n = ?
an = a1 + (n - 1)r
19 = -14 + (n - 1)3
19 = -14 + 3n - 3
-3n = -14 -3 - 19
-3n = -36(-1)
3n = 36
n = 36/3
n = 12
Logo o número de termos é 12.

Formula da Soma dos Termos da P.A.

$$Sn = \frac{(a1 + na).n}{2}$$

Sn = representa a soma dos termos da P.A.
a1 = representa o primeiro termo da P.A.
an = representa um determina termo da P.A.
n = representa um determinado número de termos da P.A.

Exemplos:
1. Calcule a soma dos 15 primeirios termos da P.A (8, 12, 16...)
s15 = ?   a1 = 8   a15 = ?   r = 12 - 8 = 4   n = 15

Observe que para usar a fórmula da soma primeiro devo calcular a15 .
an = a1 + (n - 1)r
a15 = 8 + (15 - 1)4
a15 = 8 + (14)4
a15 = 8 + 56
a15 = 64

$$Sn = \frac{(a1 + na).n}{2}$$
$$S15 = \frac{(8 + 64) . 15}{2}$$
S15= 240

Logo soma dos 15 temos é 540.

Progressões Geométricas (P.G)

Progressões Geométricas (P.G) é uma seqüência de números reais onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante (Chamada razão).
Exemplos:
Sendo a1 = 3 e a razão (q) = 2, então:
a2 = a1 . q   a2 = 3 . 2 = 6
a3 = a2 . q   a3 = 6 . 2 = 12
a4 = a3 . q   a4 = 12 . 2 = 24
a5 = a4 . q   a5 = 24 . 2 = 48
Assim, a P.G será (6, 12, 24, 48,....)

Sendo a1 = 54 e q = 1/3, então:
a2 = a1 . q   a2 = 54 . 1/3 = 18
a3 = a2 . q   a3 = 18 . 1/3 = 6
a4 = a3 . q   a4 = 6 . 1/3 = 2
a5 = a4 . q   a5 = 2 . 1/3 = 1/3
an = an-1 . q (Representa um termo qualquer da P.G)
Assim, a P.g será (18, 6, 2, 1/3,....)

Fórmula do Termo Geral da P.G

$an = a1 . q^{h-1}$

an = representa o termo procurado.
a1 = representa o primeiro termo da P.G
q = representa a razão da P.G

n = representa o número de termos.
Exemplos:
1. Calcule o sétimo termo da P.G (5, 10, 20,....)
$a_7 = ?$ $a_1 = 5$ $q = 10 : 5 = 2$ $n = 7$
$a_n = a_1 . q^{n - 1}$
$a_7 = 5 . 2^{7 - 1}$
$a_7 = 5 . 2^6$
$a_7 = 5 . 64$
$a_7 = 320$
Logo o sétimo termo da P.G é 320.

2. Calcule a razão de uma P.G, sabendo-se que $a_5 = 405$ e $a_1 = 5$.
$a_5 = 405$ $a_1 = 5$ $n = 5$ $q = ?$
$a_5 = a_1 . q^{n - 1}$
$405 = 5 . q^{5 - 1}$
$405 = 5 . q^4$
$q^4 = 405/5$
$q^4 = 81$
$q = 3$ (calculamos a raiz quarta de 81 que é 3)
Logo a razão da P.G é 3.

12. MATRIZES, DETERMINANTES E SISTEMAS LINEARES

MATRIZES

1. **<u>Definição:</u>** Matriz m x n é uma tabela de m . n números reais dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais). Exemplos:

1. $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz 2 x 3;
2. $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz 2 x2;
3. $\mathrm{C} = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & -1 & -6 \end{Vmatrix}$ é uma matriz 4 x 3.

Como podemos notar nos exemplos 1, 2 e 3 respectivamente, uma matriz pode ser representada por colchetes, parênteses ou duas barras verticais.

<u>2. Representação de uma matriz:</u>

As matrizes costumam ser representadas por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas, acompanhadas de dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna ocupadas pelo elemento.

Exemplo: Uma matriz **A** do tipo m x n é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, A= $\lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$, onde i e j representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa, $\begin{cases} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{cases}$.

Por exemplo, na matriz anterior, a_{23} é o elemento da segunda linha com o da terceira coluna.

Exemplo 1: Seja a matriz A= $\lfloor a_{ij} \rfloor_{2 \times 2}$, onde $a_{ij} = 2i + j$:

Genericamente, temos: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2 \times 2}$. Utilizando a regra de formação dos elementos dessa matriz, temos:

$$a_{ij} = 2i + j$$

$$a_{11} = 2(1) + 1 = 3$$
$$a_{21} = 2(2) + 1 = 5$$
$$a_{12} = 2(1) + 2 = 4$$
$$a_{22} = 2(2) + 2 = 6$$

Assim, A= $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Matrizes especiais:

3.1 Matriz linha: É toda matriz do tipo 1 x n, isto é, com uma única linha.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}_{1x4}$.

3.2 Matriz coluna: É toda matriz do tipo n x 1, isto é, com uma única coluna.

Ex: $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_{3x1}$.

3.3 **<u>Matriz quadrada:</u>** É toda matriz do tipo n x n, isto é, com o mesmo número de linhas e colunas. Neste caso, dizemos que a matriz é de ordem n.

Ex: $C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{2x2}$ $\qquad$ $D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & \pi & \sqrt{3} \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}_{3x3}$

Matriz de ordem 2 $\qquad$ Matriz de ordem 3

Seja A uma matriz quadrada de ordem n.

<u>Diagonal principal de uma matriz quadrada</u> é o conjunto de elementos dessa matriz, tais que i = j.

<u>Diagonal secundária de uma matriz quadrada</u> é o conjunto de elementos dessa matriz, tais que i + j = n + 1..

<u>Exemplo:</u>

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

<u>Descrição da matriz:</u>

- O subscrito 3 indica a ordem da matriz;
- A diagonal principal é a diagonal formada pelos elementos –1, 0 e –6;
- A diagonal secundária é a diagonal formada pelos elementos 5, 0 e 5;
- a_{11}= -1 é elemento da diagonal principal, pois i = j = 1;
- a_{31}= 5 é elemento da diagonal secundária, pois i + j = n + 1 = 3 + 1.

3.4 **<u>Matriz nula:</u>** É toda matriz em que todos os elementos são nulos.

<u>Notação:</u> $O_{m\,x\,n}$

<u>Exemplo:</u> $O_{2\,x\,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.5 **<u>Matriz diagonal:</u>** É toda matriz quadrada onde só os elementos da diagonal principal são diferentes de zero.

<u>Exemplo:</u> $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $B_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

3.6 **<u>Matriz identidade:</u>** É toda matriz quadrada onde todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos e os da diagonal principal são iguais a 1.

<u>Notação:</u> I_n onde n indica a ordem da matriz identidade.

Exemplo: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ou : $I_n = [a_{ij}]$, $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \end{cases}$

3.7 <u>Matriz transposta:</u> Chamamos de matriz transposta de uma matriz A a matriz que é obtida a partir de A, trocando-se ordenadamente suas linhas por colunas ou suas colunas por linhas.

Notação: A^t.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ então $A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Desse modo, se a matriz A é do tipo m x n, A^t é do tipo n x m. Note que a primeira linha de A corresponde à primeira coluna de A^t e a segunda linha de A corresponde à segunda coluna de A^t.

3.8 <u>Matriz simétrica:</u> Uma matriz quadrada de ordem n é simétrica quando A= A^t.

OBS: Se A = - A^t, dizemos que a matriz A é anti-simétrica.

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3x3}$ $\qquad$ $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{3x3}$

3.9 <u>Matriz oposta:</u> Chamamos de matriz oposta de uma matriz A a matriz que é obtida a partir de A, trocando-se o sinal de todas os seus elementos.

Notação: - A

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ então $-A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

3.10 <u>Igualdade de matrizes:</u> Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo m x n, são iguais se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são idênticos.
Notação: A = B.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix}$ $\quad$ $B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e A = B, então c = 0 e b = 3

Simbolicamente: $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq i \leq n$.

<u>4. Adição de Matrizes:</u>

Dadas as matrizes A=$\left[a_{ij}\right]_{m\,x\,n}$ e B =$\left[b_{ij}\right]_{m\,x\,n}$, chamamos de soma das matrizes **A** e **B** a matriz C =$\left[c_{ij}\right]_{m\,x\,n}$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq i \leq n$.

Notação: **A + B = C**

OBS: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** são do mesmo tipo (m x n).

Propriedades : **A, B** e **C** são matrizes do mesmo tipo (m x n), valem as seguintes propriedades:

1) Associativa:

(A + B) + C = A + (B + C)

2) Comutativa

A + B = B + A

3) Elemento Neutro

A + O = O + A = A

onde **O** é a matriz nula m x n.

4) Elemento Oposto

A + (-A) = (-A) + A = O

Exemplos:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Subtração de Matrizes:

Dadas as matrizes A=$\left[a_{ij}\right]_{m\,x\,n}$ e B=$\left[b_{ij}\right]_{m\,x\,n}$, chamamos de diferença entre as matrizes **A** e **B** a soma de **A** com a matriz oposta de **B**

Notação: **A - B = A + (-B)**

OBS: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** são do mesmo tipo (m x n).

Exemplo:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-1 & 0-2 \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

6. Multiplicação de um número real por uma matriz:

Dados um número real x e uma matriz **A** do tipo m x n , o produto de x por **A** é uma matriz do tipo m x n, obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por x.

Notação: **B =** x**.A**

OBS.: Cada elemento b_{ij} de **B** é tal que $b_{ij} = x\,a_{ij}$

Propriedades : Sendo **A** e **B** matrizes do mesmo tipo (m x n) e x e y números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1) **Associativa:**

$$\boxed{x.(y.A) = (x.y).A}$$

2) **Distributiva de um número real em relação a adição de matrizes:**

$$\boxed{x.(A+B) = x.A + x.B}$$

3) **Distributiva de uma matriz em relação a soma de dois números reais:**

$$\boxed{(x + y).A = x.A + y.A}$$

4) **Elemento Neutro:** x**.A = A**, para x = 1, ou seja:

$$\boxed{1.A = A}$$

Exemplo:

1) $3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

7. Multiplicação de matrizes:

O produto de uma matriz por outra **não** pode ser determinado através do produto dos seus respectivos elementos. A multiplicação de matrizes **não** é análoga à multiplicação de números reais.

Assim, o produto das matrizes A=$\left[a_{ij}\right]_{m\,x\,p}$ e B=$\left[b_{ij}\right]_{p\,x\,n}$ é a matriz C=$\left[c_{ij}\right]_{m\,x\,n}$, onde cada elemento c_{ij} é obtido através da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de **A** pelos elementos da j-ésima coluna de **B**.

OBS: Elementos correspondentes de matrizes do mesmo tipo m x n, são os elementos que ocupam a mesma posição nas duas matrizes. Exemplo: Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Os elementos $a_{13} = 4 \text{ e } b_{13} = 2$ são elementos correspondentes.

Decorrência da definição:

A matriz produto **A.B** existe apenas se o número de colunas da primeira matriz (**A**) é igual ao número de linhas da segunda matriz (**B**).

Assim: $A_{m\,x\,p}\ \text{e}\ B_{p\,x\,n} \Rightarrow (A.B)_{m\,x\,n}$

Note que a matriz produto terá o número de linhas (m) do primeiro fator e o número de colunas (n) do segundo fator.

Exemplos:

1) Se $A_{3\,x\,2}\ \text{e}\ B_{2\,x\,5} \Rightarrow (A.B)_{3\,x\,5}$
2) Se $A_{4\,x\,1}\ \text{e}\ B_{2\,x\,3} \Rightarrow \text{que não existe produto}$
3) $A_{4\,x\,2}\ \text{e}\ B_{2\,x\,1} \Rightarrow (A.B)_{4\,x\,1}$

Propriedades : Verificadas as condições de existência, para a multiplicação de matrizes são válidas as seguintes propriedades:

1) Associativa:

(A.B).C = A.(B.C)

2) Distributiva em relação à adição:

a) A.(B+C) = A.B + A.C
b) (A+B).C = A.C + B.C

3) Elemento Neutro:

A. I_n = I_n **.A = A**

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Atenção: *Não valem* ***as seguintes propriedades:***

1) Comutativa, pois, em geral, **A.B** $\neq$ **B.A**
2) Sendo $O_{m\,x\,n}$ uma matriz nula, **A.B =** $O_{m\,x\,n}$ não implica, necessariamente, que **A =** $O_{m\,x\,n}$ ou **B =** $O_{m\,x\,n}$.

Exemplos:

1) Sendo A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e B=$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, vamos determinar **A.B** e **B.A e** comparar os resultados

Solução:

A.B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$a_{11} = 1^{\underline{a}}\ \text{linha e}\ 1^{\underline{a}}\ \text{coluna}$ = 2.1 + 3.3 = 2 + 9 = 11

$a_{12} = 1^{\underline{a}}\ \text{linha e}\ 2^{\underline{a}}\ \text{coluna}$ = 2.2 + 3.4 =4 + 12 = 16

$a_{21} = 2^{\underline{a}}$ linha e $1^{\underline{a}}$ coluna = 4.1 + 1.3 = 4 + 3 = 7

$a_{22} = 2^{\underline{a}}$ linha e $2^{\underline{a}}$ coluna = 4.2 + 1.4 = 8 + 4 = 12

Assim:

A.B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 2.1+3.3 & 2.2+3.4 \\ 4.1+1.3 & 4.2+1.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9 & 4+12 \\ 4+3 & 8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}_{2\times2}$

B.A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1.2+2.4 & 1.3+2.1 \\ 3.2+4.4 & 3.3+4.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+8 & 3+2 \\ 6+16 & 9+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{bmatrix}_{2\times2}$

Comparando os resultados, observamos que **A.B** $\neq$ **B.A**, ou seja, a propriedade comutativa para multiplicação de matrizes **não** vale.

2) Seja A= $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3}$, determine:

a) **A.B**
b) **B.A**

<u>Solução:</u>

a) **A.B** = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2.1+3.(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4 \\ 0.1+1.(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4 \\ -1.1+4.(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4 \end{bmatrix}_{3\times3}$ =

$= \begin{bmatrix} 2+(-6) & 4+0 & 6+12 \\ 0+(-2) & 0+0 & 0+4 \\ -1+(-8) & -2+0 & -3+16 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}_{3\times3}$

b) **B.A** =

$. \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix} 1.2+2.0+3.(-1) & 1.(3)+2.(1)+3.(4) \\ -2.(2)+0.(0)+4.(-1) & -2.(3)+0.(1)+4.4 \end{bmatrix}_{2\times2}$ =

$= \begin{bmatrix} 2+0+(-3) & 3+2+12 \\ -4+0+(-4) & -6+0+16 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}_{2\times2}$

Conclusão: Verificamos que **A.B** $\neq$ **B.A**

<u>8. Matriz Inversa:</u>

Dada uma matriz **A**, quadrada, de ordem n, se existir uma matriz A', de mesma ordem, tal que **A.** A' = A' **.A** = I_n, então A' é matriz inversa de **A.** (Em outras palavras: Se **A.** A' = A' **.A** = I_n, isto implica que A' é a matriz inversa de **A**, e é indicada por A^{-1}).

Notação: A^{-1}

Exemplo: Sendo A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, vamos determinar a matriz inversa de **A**, se existir.

Solução:

Existindo, a matriz inversa é de mesma ordem de **A.**

Como, para que exista inversa, é necessário que A.A' = A'.A = I_n , ***vamos trabalhar em duas etapas:***

$1^{\underline{o}}$ Passo: Impomos a condição de que **A**.A' = I_n e determinamos A':

$$\mathbf{A.}\ A' = I_n \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1.a + 2.c & 1.b + 2.d \\ -2.a + 1.c & -2.b + 1.d \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ -2a + c & -2b + d \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

A partir da igualdade de matrizes, resolvemos o sistema acima pelo método da adição e chegamos à:

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \ (-2) \\ -2a + c = 0 \ \ \oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 4c = 2 \\ -2a + c = 0 \\ \hline 5c = 2 \Rightarrow c = \dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$-2a + c = 0$$

$$-2a + \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} b + 2d = 0 \ \ (-2) \\ -2b + d = 1 \ \ \oplus \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + 4d = 0 \\ -2b + \ d = 1 \\ \hline 5d = 1 \Rightarrow d = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$-2b + d = 1$$

$$-2b + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow b = -\frac{2}{5}$$

Assim temos:

$$A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

$2^{\underline{o}}$ <u>Passo:</u> Verificamos se A' **A** = I_2 :

$$A'.\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/5 .1 + \left(-2/5\right).(-2) & 1/5 .2 + \left(-2/5\right).1 \\ 2/5 .1 + 1/5 .(-2) & 2/5 .2 + 1/5 .1 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} 1/5 + 4/5 & 2/5 - 2/5 \\ 2/5 - 2/5 & 4/5 + 1/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5/5 & 0 \\ 0 & 5/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Portanto temos uma matriz A', tal que: **A**. A' = A' **.A** = I_2

Logo, A' é inversa de **A** e pode ser representada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}.$$

DETERMINANTES

<u>Definição:</u> Determinante é um número associado a uma matriz quadrada.

Aplicações dos determinantes na matemática:

- Cálculo da matriz inversa;
- Resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
- Cálculo da área de um triângulo, quando são conhecidas as coordenadas dos vértices.

<u>Determinante de primeira ordem</u>

Dada uma matriz quadrada de $1^{\underline{a}}$ ordem **M**=$\left[a_{11}\right]$, chamamos de determinante associado à matriz **M** o número real a_{11}.

<u>Notação:</u> det **M** ou $\left|a_{11}\right| = a_{11}$

<u>Exemplos</u>**:**

1. $M_1 = [5] \Rightarrow \det M_1 = 5 \text{ ou } |5| = 5$
2. $M_2 = [-3] \Rightarrow \det M_1 = -3 \text{ ou } |-3| = -3$

<u>Determinante de segunda ordem</u>

Dada a matriz **M**=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição, temos que o determinante associado a essa matriz, ou seja, o determinante de $2^{\underline{a}}$ ordem é dado por:

$$\det M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - \left(a_{12}a_{21}\right)$$

Assim:

$$\det M = a_{11}a_{22} - \left(a_{12}a_{21}\right)$$

<u>Exemplo:</u> Sendo **M=**$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, então:

det **M=**$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$

Logo: det **M** = -2

<u>Conclusão:</u> O determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

<u>Regra de Sarrus</u>

Dispositivo prático para calcular o determinante de $3^{\underline{a}}$ ordem.

Exemplo 1: Calcular o seguinte determinante através da Regra de Sarrus.

$$\mathbf{D=}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Solução:

$1^{\underline{a}}$ *Passo:* Repetir a duas primeiras colunas ao lado da $3^{\underline{a}}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$2^{\underline{a}}$ *Passo:* Encontrar a soma do produto dos elementos da diagonal principal com os dois produtos obtidos com os elementos das paralelas a essa diagonal.
OBS.: A soma deve ser precedida do sinal positivo, ou seja:

$$= +\left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right)$$

$3^{\underline{a}}$ *Passo:* Encontrar a soma do produto dos elementos da diagonal secundária com os dois produtos obtidos com os elementos das paralelas a essa diagonal.
OBS.: A soma deve ser precedida do sinal negativo, ou seja:

$$-\left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\right)$$

Assim:

$$D = -\left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\right) + \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right)$$

OBS.: Se desenvolvêssemos esse mesmo determinante de $3^{\underline{a}}$ ordem com o auxílio do teorema de Laplace, veríamos que as expressões são idênticas, pois representam o mesmo número real.

Exemplo 2: Calcular o valor do seguinte determinante:

a)

$$\mathbf{D_1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Solução:

a)

$$D_1 = \left|\begin{array}{ccc} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{array} =$$

$$= -(3+8+12)+(2-18-8) = -23-24 = -47$$

SISTEMAS LINEARES

Equação linear

É Toda equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são números reais que recebem o nome de *coeficientes das incógnitas* $x_1, x_2, \cdots x_n$ e *b* é um número real chamado *termo independente*.

OBS: Quando *b* = 0, a equação recebe o nome de *linear homogênea*.

Exemplos:

Equações Lineares	Equações Não-Lineares
1) 3x – 2y + 4z = 7	1) xy 3z + t = 8
2) x + y –3z - $\sqrt{7}$ t = 0 (homogênea)	2) x^2 - 4y = 3t - 4
3) –2x + 4z = 3t – y + 4	3) $\sqrt{x}$ - y + z = 7

Sistema Linear

Definição: Um conjunto de equações lineares da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é um sistema linear de *m* equações e *n* incógnitas.

Solução do Sistema Linear

Chamamos de solução do sistema a n-upla de números reais ordenados $(r_1, r_2, \cdots, r_n)$que é, simplesmente, solução de todas equações do sistema.

Matrizes associadas a um Sistema Linear

Matriz incompleta

É a matriz **A**, formada pelos coeficientes da incógnitas do sistema.

Exemplos:

Seja o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + y + z = 7 \\ -2x + y + z = 4 \end{cases}$$

Matriz incompleta:

A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz Completa

É a matriz **B,** que obtemos ao acrescentarmos à matriz incompleta uma última coluna formada pelos termos independentes das equações do sistema. Assim a matriz completa referente ao sistema anterior é:

B = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 7 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Regra de Cramer

Todo sistema normal tem uma única solução dada por $x_i = \dfrac{D_i}{D}$, onde $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$, *D*= det**A** é o determinante da matriz incompleta associada ao sistema e D_i é o determinante obtido através da substituição, na matriz incompleta, da coluna *i* pela coluna formada pelos termos independentes.

Exemplo: Resolver com o auxílio da Regra de Cramer, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$

Solução:

Temos: *m* = *n* = 2 (1ª condição) e $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8 \neq 0$ (2ª condição)

Portanto, como o sistema é normal, podemos utilizar a Regra de Cramer para resolvê-lo.

1º Passo: Calcular D_x e D_y

- Substituindo, na matriz incompleta $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, a coluna c_1 pela coluna formada pelos termos independentes, encontramos:

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -21 - 3 = -24$$

- - Substituindo, agora, c_2 pela coluna dos termos independentes, encontramos:

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 14 = -8$$

<u>*2º Passo*</u>: Encontrar x e y:

Assim:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-24}{-8} = 3$$
$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-8}{-8} = 1$$

Logo, (x, y) = (3, 1) é a solução do sistema dado.

b) $\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ 2^{x+1} + 2^y - 2^z = 9 \\ 2^x - 2^{y+1} + 2^{z+1} = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 2^x + 2^y + 2^z = 7 \\ 2^x.2^1 + 2^y - 2^z = 9 \\ 2^x - 2^y.2^1 + 2^z.2^1 = 2 \end{cases}$

<u>Solução:</u>

Da maneira como é apresentado o sistema não é linear. Assim, para torná-lo linear, fazemos as substituições:

$2^x = a, \quad 2^y = b \ \text{ e } \ 2^z = c$, obtendo:

$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ 2a + b - c = 9 \\ a - 2b + 2c = 2 \end{cases}$$

Agora temos um sistema linear com 3 equações e 3 incógnitas (*m* = *n*) e determinante da matriz incompleta diferente de zero, veja:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = -1 - 2 - 4 + 2 - 1 - 4 = -7 - 3 = -10 \neq 0$$

1º Passo: Calcular D_a, D_b e $\mathrm{D_c}$ substituindo as colunas 1, 2 e 3, respectivamente, pelos termos independentes:

$$D_a = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 7 & 1 \\ 9 & 1 \\ 2 & -2 \end{matrix} = -2-14-18+14-2-18 = -34-6 = -40$$

$$D_b = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -9+2-28+18-7+4 = -35+15 = -20$$

$$D_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = -7+18+4+2+9-28 = 7-17 = -10$$

Portanto, por Cramer vem:

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{-40}{-10} = 4 \qquad b = \frac{D_b}{D} = \frac{-20}{-10} = 2 \qquad c = \frac{D_c}{D} = \frac{-10}{-10} = 1$$

Voltando a transformação feita anteriormente (afinal queremos os valores de x, y e z) temos:

$$2^x = a \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

$$2^y = b \Rightarrow 2^y = 2 \Rightarrow 2^y = 2^1 \Rightarrow y = 1$$

$$2^z = c \Rightarrow 2^z = 1 \Rightarrow 2^z = 2^0 \Rightarrow z = 0$$

Logo, (x, y, z) = (2, 1, 0) é a solução do sistema dado.

c) $\begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 2x - \ \ y - z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$

Solução:

Temos *m* = *n* = 3 e $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{matrix} = -1+9+8+3+4+6 = 29 \neq 0$

Portanto, como o sistema é normal, apresentando uma única solução e, além do mais, o sistema é homogêneo, esta solução única será a solução trivial (0, 0, 0).

Logo, (x, y, z) = (0, 0, 0).

13. SISTEMA LEGAL DE MEDIDAS

Inicialmente devemos sempre lembrar que quando nos referimos a palavra "medir" estamos sempre fazendo uma *comparação* com uma grandeza padrão.

A necessidade da padronização das medidas no mundo e da criação de um sistema mais preciso deram origem ao Sistema Métrico Decimal em 1791. Porém mais tarde o mesmo fora substituído pelo- International System of Units (SI) -conhecido por nós como Sistema Internacional de Unidades.

Medida padrão de Comprimento: É representado simbolicamente pela letra **"m"**(lê-se **metro**)

Unidade no SI: m

Tabela 1.0

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
÷10	÷10	÷10	1	X10	X10	X10

Múltiplos do Metro:

- dam : Decâ*metro* -> equivale a 10 vezes a grandeza padrão"m"
- hm: Hectô*metro* -> Equivale a 10^2 vezes a grandeza padrão "m"
- km: Quilô*metro* -> Equivale a 10^3 vezes a grandeza padrão "m"

Submúltiplos do Metro:

- dm: Decí*metro* -> Equivale a 10^{-1} (1/10) vezes a grandeza padrão "m"
- cm: Cent*ímetro* -> Equivale a 10^{-2} (1/100) vezes a grandeza padrão "m"
- mm: Milí*metro* -> Equivale a 10^{-3} (1/1000) vezes a grandeza padrão "m"

Medida padrão de massa: É representado simbolicamente pela letra **"g"** (lê-se **o grama**)

Unidade no SI: Kg

kg (Quilograma)	hg (Hectograma)	dag (Decagrama)	g (grama)	dg (Decigrama)	cg (Centigrama)	mg (Miligrama)
÷10	÷10	÷10	1	X10	X10	X10

Obs: 1ton=1000kg

Medida padrão de superfície ou área: É representado simbolicamente por **"m²"** (lê-se **metro quadrado**). Considera-se uma unidade derivada do metro.

Unidade no SI: m^2

Km^2	Hm^2	Dam^2	M^2	Dm^2	Cm^2	Mm^2
÷100	÷100	÷100	1	X100	X100	X100

ATENÇÃO: Para convertermos agora devemos ver que é necessário "pularmos" de duas em duas "casas". Observe:

- $4m^2$=40000cm^2
- $1dam^2$=0,01m^2

Medida padrão de volume ou capacidade: É representado simbolicamente por **"m^3"** (lê-se **metro cúbico**). Considera-se uma unidade derivada do metro.

Km^3	Hm^3	Dam^3	M^3	Dm^3	Cm^3	Mm^3
÷1000	÷1000	÷1000	1	X1000	X1000	X1000

Obs:1dm^3=1L

ATENÇÃO: Para convertermos devemos ver que é necessário "pularmos "de três em três "casas". Observe:

- $1m^3$=1000 dm (1000 Litros)
- $1dm^3$= 0,000001 dam^3

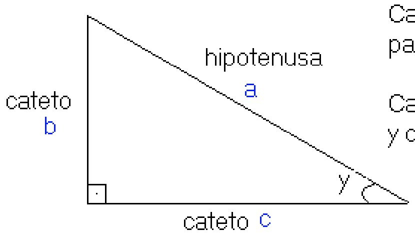
14. TRIGONOMETRIA

Noções de trigonometria

Trigonometria no Triângulo Retângulo

A palavra trigonometria significa medida dos três ângulos de um triângulo e determina um ramo da matemática que estuda a relação entre as mediadas dos lados e dos ângulos de um triângulo.
Conta a história da matemática que Tales foi um grande estudioso desse ramo da matemática, mas não podemos afirmar que este foi seu inventor. A trigonometria não foi obra de um só homem, nem de um povo só.

Seno, Cosseno e Tangente de um Ângulo Agudo
Observe o triângulo retângulo abaixo, onde **a** é a hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90º), **b** e **c** são os catetos do triângulo retângulo(catetos são os lado que formam o ângulo de 90º)



Cateto oposto é aquele que esta de frente para o ângulo y.

Cateto adjacente é aquele que forma o ângulo y com a hipotenusa.

Lembre-se, os catetos variam de nome de acordo com a posição do ângulo.

Seno:

$$\text{seno de } y = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{seno } y = \frac{b}{a}$$

Cosseno:

$$\text{cosseno de } y = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cós } y = \frac{c}{a}$$

Tangente:

$$\text{tangente de } y = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\text{tg } y = \frac{b}{c}$$

Cotangente:

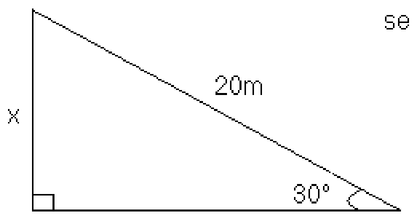
$$\text{Cotangente de } y = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$$

$$\text{cotg } y = \frac{c}{b}$$

<u>Razões Trigonométricas Especiais</u>

ângulo / razão	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cotangente	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Existem outro ângulos, seus senos, cossenos, tangentes e cotangentes, se encontram em uma tabela chamada tabela trigonométrica.
Exemplo:
1. Calcule o valor de x na figura abaixo.(observe na tabela sen 30º)



$$\text{sen } 30° = \frac{x}{20} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{20} \longrightarrow 2x = 20$$

$$x = \frac{20}{2} \longrightarrow x = 10m$$

Teorema de Pitágoras

“O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos”.

15. GEOMETRIA PLANA E ESPACIAL

Geometria Plana:

Nesse estudo sobre a **Geometria** **Euclidiana ou Plana**, serão abordados os principais conceitos e um pouco da história desse ramo da matemática milenar que desempenha tão grande representatividade na vida da humanidade. Não há dúvidas da importância da Geometria na vida humana. O conhecimento geométrico revolucionou o saber, tornando-se o seu estudo, necessário à realização de grandes feitos nas áreas da construção e na partilha de terras. Se dividirmos a palavra Geometria conseguimos chegar ao seu significado etimológico: geo (terra) + metria (medida), portanto Geometria significa medida de terra.

Passeio pela História

O conhecimento geométrico como conhecemos hoje nem sempre foi assim. A geometria surgiu de forma intuitiva, e como todos os ramos do conhecimento, nasceu da necessidade e da observação humana. O seu início se deu forma natural através da observação do homem à natureza. Ao arremessar uma pedra num lago, por exemplo, observou-se que ao haver contato dela com a água, formavam-se circunferências concêntricas – centros na mesma origem. Para designar esse tipo de acontecimento surgiu a ***Geometria Subconsciente***.

Conhecimentos geométricos também foram necessários aos sacerdotes. Por serem os coletores de impostos da época, a eles era incumbida a demarcação das terras que eram devastadas pelas enchentes do Rio Nilo. A partilha da terra era feita diretamente proporcional aos impostos pagos. Enraizada nessa necessidade puramente humana, nasceu o cálculo de área.

Muitos acontecimentos se deram, ainda no campo da Geometria Subconsciente, até que a mente humana fosse capaz de absorver propriedades das formas antes vistas intuitivamente. Nasce com esse feito a ***Geometria Científica*** ou***Ocidental***. Essa geometria, vista nas instituições de ensino, incorpora uma série de regras e sequências lógicas responsáveis pelas suas definições e resoluções de problemas de cunho geométrico.

Foi em 300 a.C. que o grande geômetra Euclides de Alexandria desenvolveu grandiosos trabalhos matemático-geométricos e os publicou em sua obra intitulada *Os Elementos*. Essa foi, e continua sendo, a maior obra já publicada - desse ramo - de toda a história da humanidade. A Geometria plana, como é popularmente conhecida nos dias atuais, leva também o título de ***Geometria Euclidiana*** em homenagem ao seu grande mentor Euclides de Alexandria.

Cálculo de Áreas

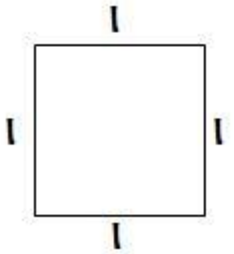
Conhecer sobre área é conhecer sobre o espaço que podemos preencher em regiões poligonais convexas – qualquer segmento de reta com extremidades na região só terá pontos pertencentes a esta.

Todos os segmentos de retas contidos no plano e que têm extremidades nele, permanecem com os seus pontos pertencentes ao plano.

O cálculo de áreas tem muita aplicabilidade em diferentes momentos, seja em atividades puramente cognitivas, ou até mesmo trabalhistas. Um exemplo de profissional que faz uso dessa ferramenta para tornar possível o desempenho do seu trabalho é o pedreiro. É através do conhecimento de área que é possível estimar a quantidade de cerâmica necessária para pavimentar um determinado cômodo de uma casa, por exemplo.

O quadrado

O quadrado é uma figura geométrica plana regular em que todos os seus lados e ângulos são iguais. Veja um exemplo de quadrado na figura a seguir:



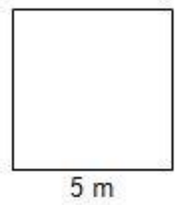
Todos os lados são iguais e tem medida **l**. Os quatro ângulos são congruentes e medem 90º cada.

Para calcular a área de um quadrado basta que se multipliquem dois dos seus lados **l** entre si.

Área do quadrado = Lado x Lado **Ou**

$A_{\square} = l \times l$, Ou ainda, $A_{\square} = l^2$

Exemplo 1



Para pavimentar a sala de sua casa D. Carmem comprou 26 m^2 de piso. Sabendo que a sala tem o formato quadrangular e que um dos lados mede 5 m, diga se o piso comprado por D. Carmem será suficiente para pavimentar a sua sala.

- A sala tem o formato quadrangular;
- O seu lado mede 5 m;
- A área do quadrado é $A = l^2$.

Com base nos dados acima temos:

$$A_{\square} = l^2 \longrightarrow l = 5\,m$$

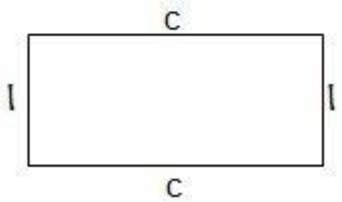
$$A_{\square} = (5m)^2 = \mathbf{25\ m^2}$$

Conclui-se então que o piso comprado por D. Carmem será suficiente para pavimentar sua sala e ainda sobrará 1 m^2.

Lembrete: a unidade de medida de área mais utilizada é o metro quadrado (m^2), porém em alguns casos usa-se o km^2, cm^2, etc.

O retângulo

O retângulo é uma figura geométrica plana cujos lados opostos são paralelos e iguais e todos os ângulos medem 90º. Confiram o retângulo abaixo:



Os lados opostos são iguais c = c e l = l.

Os quatro ângulos são congruentes e medem 90º cada.

Para calcular a área do retângulo, basta que se multipliquem seu comprimento **c** pela largura **l**.

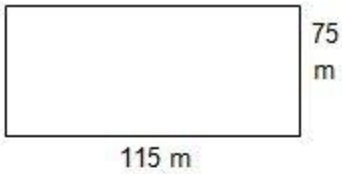
Área do retângulo = comprimento x largura **Ou**

$$A_{\square} = c \times l$$

Exemplo 2

Num campeonato de futebol a equipe organizadora do evento está providenciando o gramado que será plantado em toda área do campo. Para comprar as gramas, a equipe precisa saber a área do campo, pois a grama é vendida por metro quadrado. Sabendo que o campo tem 115 m de comprimento por 75 m de largura e ainda que o campo tem o formato retangular, ajude a equipe a solucionar o problema, diga quantos metros quadrados de área tem o campo de futebol?

- *O campo tem o formato de um retângulo;*
- *O comprimento equivale a 115 m;*
- *A largura são 75 m;*
- *A área do retângulo é $A_{\square} = c \times l$*



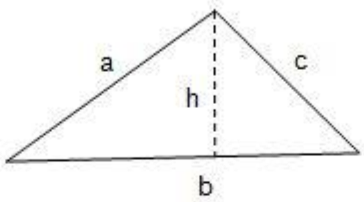
Com base nos dados temos,

$$A_{\square} = c \times l \longrightarrow c = 115\text{ m e } l = 75\text{ m}$$

$$A_{\square} = 115\text{ m} \times 75\text{ m} \longrightarrow \mathbf{A_{\square} = 8625\ m^2}$$

O triângulo

O triângulo é uma figura geométrica plana formada por três lados e três ângulos. A soma dos seus ângulos internos é igual 180º.



a, b e c representam os lados do triângulo, enquanto h representa a sua altura.

Para calcular a área do triângulo multiplica-se a base **b** pela altura **h** e divide o resultado por 2 (metade da área do retângulo).

$$\text{Área do Triângulo} = \frac{base \ x \ altura}{2} \quad \textbf{Ou}$$

$$A_{\triangle} = \frac{b \ x \ h}{2}$$

Exemplo 3

Encontre a área de um triângulo cuja base mede 8,2 cm e a altura 3,6 cm.

- *Medida da base 8,2 cm;*
- *Medida da altura 3,6 cm;*
- *Área do triângulo* $A_{\triangle} = \frac{b\ x\ h}{2}$

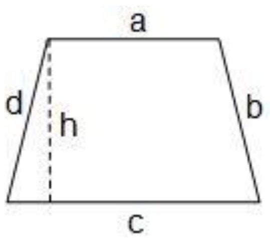
Com base nos dados temos,

$$A_{\triangle} = \frac{b\ x\ h}{2} \longrightarrow b = 8{,}2\ cm \text{ e } h = 3{,}6\ cm$$

$$A_{\triangle} = \frac{8{,}2\ cm\ x\ 3{,}6\ cm}{2} \longrightarrow \mathbf{A_{\triangle} = 14{,}76\ cm^2}$$

O trapézio

O trapézio é uma figura plana com um par de lados paralelos (bases) e um par de lados concorrentes.



a // c, b ├ c e h representa a altura do trapézio.

- // → **paralela**
- ├ → **concorrente**

Para calcular a área do trapézio adiciona-se a base maior **c** à base menor **a**, ao resultado da soma multiplica-se a altura, e por fim, divide-se o resultado final por 2.

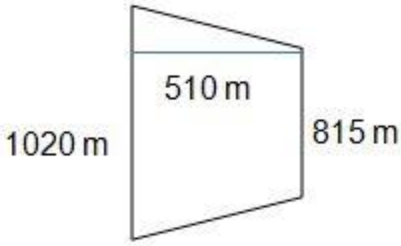
$$\text{Área do trapézio} = \frac{(Base\ maior + base\ menor) x\ altura}{2} \quad \textbf{ou}$$

$$A_{⏢} = \frac{(c+a) x\ h}{2}$$

Exemplo 4

Um fazendeiro quer saber a área de um lote de terra que acabara de comprar. O lote tem o formato de um trapézio. Sabendo que a frente mede 1020 m, o fundo, 815 m e a distância da frente ao fundo é de 510 m. Determine a área do lote.

- *O lote tem a forma de um trapézio;*
- *A frente mede 1020 m;*
- *O fundo mede 815 m;*
- *A distância da frente ao fundo é de 510 m.*
- *A área de um trapézio é* $A_{\triangle} = \dfrac{(c+a)\,x\,h}{2}$



Com base nos dados temos,

$$A_{\triangle} = \frac{(c+a)\,x\,h}{2} \longrightarrow c = 1020\text{ m},\ a = 815 \text{ e } h = 510\text{ m.}$$

$$A_{\triangle} = \frac{(1020\,m+815\,m)\,x\,510}{2} \longrightarrow \mathbf{A_{\triangle} = 467925\ m^2}.$$

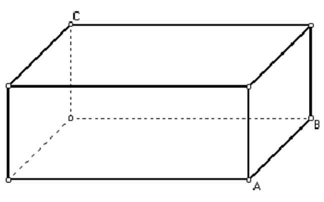
Conclusão

A necessidade geométrica perpassou o tempo e está impregnada em nossas vidas nos dias atuais. O conhecimento da Geometria Plana (Euclidiana) é tão importante que não é possível o caminhar separado da sua prática e do seu entendimento.

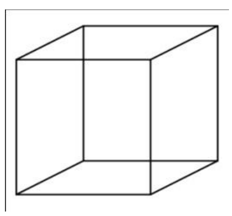
GEOMETRIA ESPACIAL

Fórmulas de Geometria Espacial

Paralelepípedo



Cubo



$A_B = a.b$

$A_T = 2ab + 2bc + 2ac$

$V = a.b.c$

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$A_F = \ell^2$

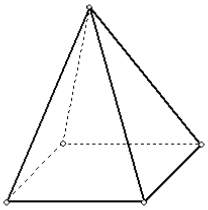
$A_L = 4\ell^2$

$A_T = 6\ell^2$

$V = \ell^3$

$d_{face} = \ell\sqrt{2} \qquad D_{cubo} = \ell\sqrt{3}$

Pirâmides

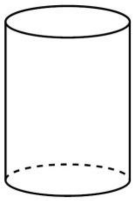


$$A_L = p.ap \qquad ap^2 = h^2 + K^2$$

$$A_T = A_L + A_B \qquad a^2 = ap^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$V = \frac{A_B.h}{3} \qquad a^2 = h^2 + R^2$$

Cilindro



$$V = A_B.h = \pi r^2 h \qquad A_B = \pi r^2$$

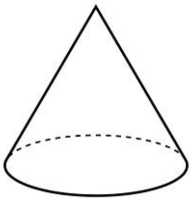
$$A_L = 2\pi rh$$

$$A_T = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$A_S = 2rh$$

$$Equilátero \;\rightarrow\; h = 2r$$

Cone



$$V = \frac{A_B . h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$A_B = \pi r^2$$

$$A_L = \pi r g$$

$$A_S = rh$$

$$A_T = \pi r^2 + \pi r g$$

$$g^2 = r^2 + h^2$$

$$Equilátero \rightarrow g = 2r$$

16. ESTATÍSTICA

1- Objeto da estatística

Estatística é uma ciência exata que visa fornecer subsídios ao analista para coletar, organizar, resumir, analisar e apresentar dados. Trata de parâmetros extraídos da população, tais como média ou desvio padrão.
A estatística fornece-nos as técnicas para extrair informação de dados, os quais são muitas vezes incompletos, na medida em que nos dão informação útil sobre o problema em estudo, sendo assim, é objetivo da Estatística extrair informação dos dados para obter uma melhor compreensão das situações que representam.
Quando se aborda uma problemática envolvendo métodos estatísticos, estes devem ser utilizados mesmo antes de se recolher a amostra, isto é, deve-se planejar a experiência que nos vai permitir recolher os dados, de modo que, posteriormente, se possa extrair o máximo de informação relevante para o problema em estudo, ou seja para a população de onde os dados provêm.
Quando de posse dos dados, procura-se agrupa-los e reduzi-los, sob forma de amostra, deixando de lado a aleatoriedade presente.
Seguidamente o objetivo do estudo estatístico pode ser o de estimar uma quantidade ou testar uma hipótese, utilizando-se técnicas estatísticas convenientes, as quais realçam toda a potencialidade da Estatística, na medida em que vão permitir tirar conclusões acerca de uma população, baseando-se numa pequena amostra, dando-nos ainda uma medida do erro cometido.

2- População e amostra

Qualquer estudo científico enfrenta o dilema de estudo da população ou da amostra. Obviamente tería-se uma precisão muito superior se fosse analisado o grupo inteiro, a população, do que uma pequena parcela representativa, denominada amostra. Observa-se que é impraticável na grande maioria dos casos, estudar-se a população em virtude de distâncias, custo, tempo, logística, entre outros motivos.
A alternativa praticada nestes casos é o trabalho com uma amostra confiável. Se a amostra é confiável e proporciona inferir sobre a população, chamamos de inferência estatística. Para que a inferência seja válida, é necessária uma boa amostragem, livre de erros, tais como falta de determinação correta da população, falta de aleatoriedade e erro no dimensionamento da amostra.
Quando não é possível estudar, exaustivamente, todos os elementos da população, estudam-se só alguns elementos, a que damos o nome de Amostra.

Quando a amostra não representa corretamente a população diz-se enviesada e a sua utilização pode dar origem a interpretações erradas.

3- Recenseamento

Recenseamento é a contagem oficial e periódica dos indivíduos de um País, ou parte de um País. Ele abrange, no entanto, um leque mais vasto de situações. Assim, pode definir-se recenseamento do seguinte modo:
Estudo científico de um universo de pessoas, instituições ou objetos físicos com o propósito de adquirir conhecimentos, observando todos os seus elementos, e fazer juízos quantitativos acerca de características importantes desse universo.

4- Estatística descritiva e estatística indutiva

Sondagem
Por vezes não é viável nem desejável, principalmente quando o número de elementos da população é muito elevado, inquirir todos os seus elementos sempre que se quer estudar uma ou mais características particulares dessa população.
Assim surge o conceito de sondagem, que se pode tentar definir como:
Estudo científico de uma parte de uma população com o objetivo de estudar atitudes, hábitos e preferências da população relativamente a acontecimentos, circunstâncias e assuntos de interesse comum.

5- Amostragem
Amostragem é o processo que procura extrair da população elementos que através de cálculos probabilísticos ou não, consigam prover dados de inferências da população-alvo.

Tipos de Amostragem	Não Probabilística
	Acidental ou conveniência
	Intencional
	Quotas ou proporcional
	Desproporcional
	Probabilística
	Aleatória Simples
	Aleatória Estratificada
	Conglomerado

Não Probabilística
A escolha de um método não probabilístico, via de regra, sempre encontrará desvantagem frente ao método probabilístico. No entanto, em alguns casos, se faz necessário a opção por este método. Fonseca (1996), alerta que não há formas de se generalizar os resultados obtidos na amostra para o todo da população quando se opta por este método de amostragem.

5.1- Acidental ou conveniência
Indicada para estudos exploratórios. Freqüentemente utilizados em super mercados para testar produtos.

Intencional
O entrevistador dirige-se a um grupo em específico para saber sua opinião. Por exemplo, quando de um estudo sobre automóveis, o pesquisador procura apenas oficinas.

5.2- Quotas ou proporcional
Na realidade, trata-se de uma variação da amostragem intencional. Necessita-se ter um prévio conhecimento da população e sua proporcionalidade. Por exemplo, deseja-se entrevistar apenas indivíduos da classe A, que representa 12% da população. Esta será a quota para o trabalho. Comumente também substratifica-se uma quota obedecendo a uma segunda proporcionalidade.

5.3- Desproporcional
Muito utilizada quando a escolha da amostra for desproporcional à população. Atribui-se pesos para os dados, e assim obtém-se resultados ponderados representativos para o estudo.

Probabilística

Para que se possa realizar inferências sobre a população, é necessário que se trabalhe com amostragem probabilística. É o método que garante segurança quando investiga-se alguma hipótese. Normalmente os indivíduos investigados possuem a mesma probabilidade de ser selecionado na amostra.

5.4- Aleatória Simples
É o mais utilizado processo de amostragem. Prático e eficaz, confere precisão ao processo de amostragem. Normalmente utiliza-se uma tabela de números aleatórios e nomeia-se os indivíduos, sorteando-se um por um até completar a amostra calculada
Uma variação deste tipo de amostragem é a sistemática. Em um grande número de exemplos, o pesquisador depara-se com a população ordenada. Neste sentido, tem-se os indivíduos dispostos em seqüência o que dificulta a aplicação exata desta técnica.
Quando se trabalha com sorteio de quadras de casas por exemplo, há uma regra crescente para os números das casas. Em casos como este, divide-se a população pela amostra e obtém-se um coeficiente (y). A primeira casa será a de número x, a segunda será a de número x + y; a terceira será a de número x + 3. y.
Supondo que este coeficiente seja 6. O primeiro elemento será 3. O segundo será 3 + 6. O terceiro será 3 + 2.6. O quarto será 3 + 3.6, e assim sucessivamente.

Aleatória Estratificada
Quando se deseja guardar uma proporcionalidade na população heterogênea. Estratifica-se cada subpopulação por intermédio de critérios como classe social, renda, idade, sexo, entre outros.

5.5- Conglomerado
Em corriqueiras situações, torna-se difícil coletar características da população. Nesta modalidade de amostragem, sorteia-se um conjunto e procura-se estudar todo o conjunto. É exemplo de amostragem por conglomerado, famílias, organizações e quarteirões.

6- Dimensionamento da amostra

Quando deseja-se dimensionar o tamanho da amostra, o procedimento desenvolve-se em três etapas distintas:

- Avaliar a variável mais importante do grupo e a mais significativa;
- Analisar se é ordinal, intervalar ou nominal;
- Verificar se a população é finita ou infinita;

Variável intervalar e população infinita	$n = \left(\frac{z.\sigma}{d}\right)^2$
Variável intervalar e população finita	$n = \frac{z^2.\sigma^2.N}{d^2(N-1)+z^2.\sigma^2}$
Variável nominal ou ordinal e população infinita	$n = \frac{(z^2.p.q)}{d^2}$
Variável nominal ou ordinal e população finita	$n = \frac{z^2 p.q.N}{d^2[d^2(N-1)+z^2.p.q]}$

Obs.: A proporção (p) será a estimativa da verdadeira proporção de um dos níveis escolhidos para a variável adotada. Por exemplo, 60% dos telefones da amostra é Nokia, então p será 0,60.
A proporção (q) será sempre 1 - p. Neste exemplo q, será 0,4. O erro é representado por d.
Para casos em que não se tenha como identificar as proporções confere-se 0,5 para p e q.

7- Tipos de dados

Basicamente os dados, dividem-se em contínuos e discretos. O primeiro é definido como qualquer valor entre dois limites quaisquer, tal como um diâmetro. Portanto trata-se de um valor que pode ser "quebrado". São dados contínuos, questões que envolvem idade, renda, gastos, vendas, faturamento, entre muitas outras.

Quando fala-se em valores discretos, aborda-se um valor exato, tal como quantidade de peças defeituosas. Comumente utiliza-se este tipo de variáveis para tratar de numero de filhos, satisfação e escalas nominais no geral.
O tipologia dos dados determina a variável, ela será portanto contínua ou discreta. Isto quer dizer que ao definir-se uma variável com contínua ou discreta, futuramente já definiu-se que tipo de tratamento se dará a ela.
De acordo com o que dissemos anteriormente, numa análise estatística distinguem-se essencialmente duas fases:
Uma primeira fase em que se procura descrever e estudar a amostra:
Estatística Descritiva e uma segunda fase em que se procura tirar conclusões para a população:

1ª Fase Estatística Descritiva
Procura-se descrever a amostra, pondo em evidência as características principais e as propriedades.
2ª Fase Estatística Indutiva
Conhecidas certas propriedades (obtidas a partir de uma análise descritiva da amostra), expressas por meio de proposições, imaginam-se proposições mais gerais, que exprimam a existência de leis (na população).

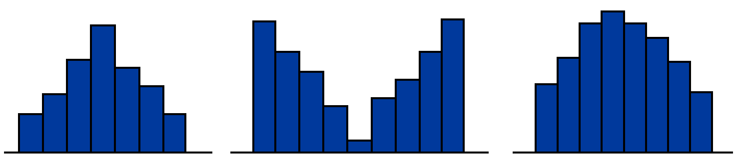
No entanto, ao contrário das proposições deduzidas, não podemos dizer que são falsas ou verdadeiras, já que foram verificadas sobre um conjunto restrito de indivíduos, e portanto não são falsas, mas não foram verificadas para todos os indivíduos da População, pelo que também não podemos afirmar que são verdadeiras !
Existe, assim, um certo grau de incerteza (percentagem de erro) que é medido em termos de Probabilidade.
Considerando o que foi dito anteriormente sobre a Estatística Indutiva, precisamos aqui da noção de Probabilidade, para medir o grau de incerteza que existe, quando tiramos uma conclusão para a população, a partir da observação da amostra.

8- Dados, tabelas e gráficos

Distribuição de freqüência
Quando da análise de dados, é comum procurar conferir certa ordem aos números tornando-os visualmente mais amigáveis. O procedimento mais comum é o de divisão por classes ou categorias, verificando-se o número de indivíduos pertencentes a cada classe.

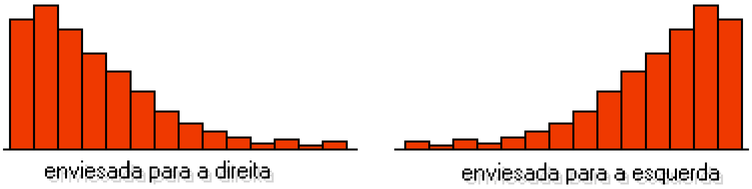
1. Determina-se o menor e o maior valor para o conjunto:
2. Definir o limite inferior da primeira classe (Li) que deve ser igual ou ligeiramente inferior ao menor valor das observações:
3. Definir o limite superior da última classe (Ls) que deve ser igual ou ligeiramente superior ao maior valor das observações:
4. Definir o número de classes (K), que será calculado usando $k = \sqrt{n}$. Obrigatoriamente deve estar compreendido entre 5 a 20.
5. Conhecido o número de classes define-se a amplitude de cada classe:
6. Com o conhecimento da amplitude de cada classe, define-se os limites para cada classe (inferior e superior)

Distribuições simétricas
A distribuição das frequências faz-se de forma aproximadamente simétrica, relativamente a uma classe média

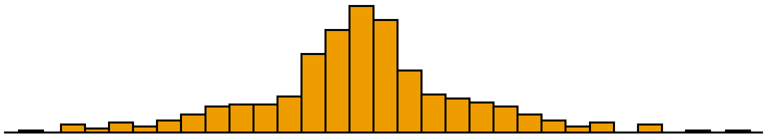


Caso especial de uma distribuição simétrica
Quando dizemos que os dados obedecem a uma distribuição normal, estamos tratando de dados que distribuem-se em forma de sino.

Distribuições Assimétricas
A distribuição das freqüências apresenta valores menores num dos lados:



Distribuições com "caudas" longas
Observamos que nas extremidades há uma grande concentração de dados em relação aos concentrados na região central da distribuição.



9- Medidas de tendência Central

As mais importantes medidas de tendência central são a média aritmética, média aritmética para dados agrupados, média aritmética ponderada, mediana, moda, média geométrica, média harmônica, quartis. Quando se estuda variabilidade, as medidas mais importantes são: amplitude, desvio padrão e variância.

Medidas	
Média aritmética	$\frac{x_1+...x_n}{n}$
Média aritmética para dados agrupados	$\frac{f_1.x_1...f_k.x_k}{f_1...f_k}$
Média aritmética ponderada	$\frac{P_1.(X_1)+P_2.(X_2)}{P_{total}}$
Mediana	1) Se *n* é impar, o valor é central, 2) se *n* é par, o valor é a média dos dois valores centrais
Moda	Valor que ocorre com mais freqüência.
Média geométrica	$G=\sqrt[n]{X_1.X}$
Média harmônica	$\frac{n}{\frac{1}{x_1}}+\frac{1}{x_i}$
Quartil	$Q=[p(sup)-0,25].x(inf)+[0,25-p(inf)].x\frac{(sup)}{p(sup)}-p(inf)$

Sendo a média uma medida tão sensível aos dados, é preciso ter cuidado com a sua utilização, pois pode dar uma imagem distorcida dos dados.
Pode-se mostrar, que quando a distribuição dos dados é "normal", então a melhor medida de localização do centro, é a média.
Sendo a Distribuição Normal uma das distribuições mais importantes e que surge com mais freqüência nas aplicações, (esse fato justifica a grande utilização da média).
A média possui uma particularidadebastante interessante, que consiste no seguinte:
se calcularmos os desvios de todas as observações relativamente à média e somarmos esses desvios o resultado obtido é igual a zero.
A média tem uma outra característica, que torna a sua utilização vantajosa em certas aplicações:
Quando o que se pretende representar é a quantidade total expressa pelos dados, utiliza-se a média.

Na realidade, ao multiplicar a média pelo número total de elementos, obtemos a quantidade pretendida.

9.1- Moda

Define-se moda como sendo: o valor que surge com mais freqüência se os dados são discretos, ou, o intervalo de classe com maior freqüência se os dados são contínuos.
Assim, da representação gráfica dos dados, obtém-se imediatamente o valor que representa a moda ou a classe modal
Esta medida é especialmente útil para reduzir a informação de um conjunto de dados qualitativos, apresentados sob a forma de nomes ou categorias, para os quais não se pode calcular a média e por vezes a mediana.

9.2- Mediana

A mediana, é uma medida de localização do centro da distribuição dos dados, definida do seguinte modo:
Ordenados os elementos da amostra, a mediana é o valor (pertencente ou não à amostra) que a divide ao meio, isto é, 50% dos elementos da amostra são menores ou iguais à mediana e os outros 50% são maiores ou iguais à mediana
Para a sua determinação utiliza-se a seguinte regra, depois de ordenada a amostra de n elementos:
Se n é ímpar, a mediana é o elemento médio.
Se n é par, a mediana é a semi-soma dos dois elementos médios.

9.3-Considerações a respeito de Média e Mediana
Se se representarmos os elementos da amostra ordenada com a seguinte notação: X1:n , X2:n , ... , Xn:n
então uma expressão para o cálculo da mediana será:
Como medida de localização, a mediana é mais robusta do que a média, pois não é tão sensível aos dados.
1- Quando a distribuição é simétrica, a média e a mediana coincidem.
2- A mediana não é tão sensível, como a média, às observações que são muito maiores ou muito menores do que as restantes (outliers). Por outro lado a média reflete o valor de todas as observações.

Como já vimos, a média ao contrário da mediana, é uma medida muito influenciada por valores "muito grandes" ou "muito pequenos", mesmo que estes valores surjam em pequeno número na amostra. Estes valores são os responsáveis pela má utilização da média em muitas situações em que teria mais significado utilizar a mediana.

A partir do exposto, deduzimos que se a distribuição dos dados:
1. for aproximadamente simétrica, a média aproxima-se da mediana
2. for enviesada para a direita (alguns valores grandes como "outliers"), a média tende a ser maior que a mediana
3. for enviesada para a esquerda (alguns valores pequenos como "outliers"), a média tende a ser inferior à mediana.

10 - Medidas de dispersão

Introdução
No capítulo anterior, vimos algumas medidas de localização do centro de uma distribuição de dados. Veremos agora como medir a variabilidade presente num conjunto de dados através das seguintes medidas:

10.1- Medidas de dispersão
Um aspecto importante no estudo descritivo de um conjunto de dados, é o da determinação da variabilidade ou dispersão desses dados, relativamente à medida de localização do centro da amostra.
Supondo ser a média, a medida de localização mais importante, será relativamente a ela que se define a principal medida de dispersão - a variância, apresentada a seguir.

10.2- Variância
Define-se a variância, como sendo a medida que se obtém somando os quadrados dos desvios das observações da amostra, relativamente à sua média, e dividindo pelo número de observações da

amostra menos um.

$$\Sigma\frac{(x1-média)^2}{n-1}$$

10.3- Desvio-padrão
Uma vez que a variância envolve a soma de quadrados, a unidade em que se exprime não é a mesma que a dos dados. Assim, para obter uma medida da variabilidade ou dispersão com as mesmas unidades que os dados, tomamos a raiz quadrada da variância e obtemos o desvio padrão:
O desvio padrão é uma medida que só pode assumir valores não negativos e quanto maior for, maior será a dispersão dos dados.
Algumas propriedades do desvio padrão, que resultam imediatamente da definição, são:
o desvio padrão será maior, quanta mais variabilidade houver entre os dados.

$$\sqrt{\Sigma\frac{(x1-média)}{n-1}2}$$

17. PROPABILIDADE

Noções de Probabilidade

A história da teoria das probabilidades, teve início com os jogos de cartas, dados e de roleta. Esse é o motivo da grande existência de exemplos de jogos de azar no estudo da probabilidade. A teoria da probabilidade permite que se calcule a chance de ocorrência de um número em um experimento aleatório.

Experimento Aleatório

É aquele experimento que quando repetido em iguais condições, podem fornecer resultados diferentes, ou seja, são resultados explicados ao acaso. Quando se fala de tempo e possibilidades de ganho na loteria, a abordagem envolve cálculo de experimento aleatório.

Espaço Amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. A letra que representa o espaço amostral, é S.

Conceito de probabilidade

Se num fenômeno aleatório as possibilidades são igualmente prováveis, então a probabilidade de ocorrer um evento A é:

$$P(A)=\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Por, exemplo, no lançamento de um dado, um número par pode ocorrer de 3 maneiras diferentes dentre 6 igualmente prováveis, portanto, P = 3/6= 1/2 = 50%
Dizemos que um espaço amostral S (finito) é equiprovável quando seus eventos elementares têm probabilidades iguais de ocorrência.
Num espaço amostral equiprovável S (finito), a probabilidade de ocorrência de um evento A é sempre:

$$P(A)=\frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de S}}=\frac{n(A)}{n(S)}$$

Exemplo:
Uma urna tem 30 bolas, sendo 10 vermelhas e 20 azuis. Se ocorrer um sorteio de 2 bolas, uma de cada vez e sem reposição, qual será a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser azul?
Resolução:
Seja o espaço amostral S=30 bolas, bolinhas e considerarmos os seguintes eventos:
A: branca na primeira retirada e P(A) = 10/30
B: preta na segunda retirada e P(B) = 20/29
Assim:
P(A e B) = P(A).(B/A) = 10/30.20/29 = 20/87

Exemplo:
Uma urna tem 30 bolas, sendo 10 vermelhas e 20 azuis. Se sortearmos 2 bolas, 1 de cada vez e respondo a sorteada na urna, qual será a probabilidade de a primeira ser branca e a segunda ser preta?
Resolução:
Como os eventos são independentes, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada e azul na segunda retirada é igual ao produto das probabilidades de cada condição, ou seja, P(A e B) = P(A).P(B). Ora, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada ´e 10/30 e a de sair azul na segunda retirada 20/30. Daí, usando a regra do produto, temos:
10/30.20/30=2/9.
Observe que na segunda retirada forma consideradas todas as bolas, pois houve reposição. Assim, P(B/A) =P(B), porque o fato de sair bola vermelha na primeira retirada não influenciou a segunda retirada, já que ela foi reposta na urna.

Exemplo: Se dois dados, azul e branco, forem lançados, qual a probabilidade de sair 5 no azul e 3 no branco?
Considerando os eventos:
A: Tirar 5 no dado azul e P(A) = 1/6
B: Tirar 3 no dado branco e P(B) = 1/6
Sendo S o espaço amostral de todos os possíveis resultados, temos:
n(S) = 6.6 = 36 possibilidades. Daí, temos:P(A ou B) = 1/6 + 1/6 – 1/36 = 11/36

Exemplo: Se retirarmos aleatoriamente uma carta de baralho com 52 cartas, qual a probabilidade de ser um 8 ou um Rei?
Sendo S o espaço amostral de todos os resultados possíveis, temos: n(S) = 52 cartas.
Considere os eventos:
A: sair 8 e P(A) = 8/52
B: sair um rei e P(B) = 4/52
Assim, P(A ou B) = 4/52 + 4/52 – 0 = 8/52 = 2/13. Note que P(A e B) = 0, pois uma carta não pode ser 8 e rei ao mesmo tempo. Quando isso ocorre dizemos que os eventos A e B são mutuamente exclusivos.

18. ANÁLISE COMBINATÓRIA

Foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos chamados jogos de azar que levou ao desenvolvimento da Análise Combinatória, parte da Matemática que estuda os métodos de contagem. Esses estudos foram iniciados já no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1500-1557), conhecido como Tartaglia. Depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662).

A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indireta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

2 - Fatorial

Seja n um número inteiro não negativo. Definimos o fatorial de n (indicado pelo símbolo n!) como sendo:

n! = n .(n-1) . (n-2) . ... .4.3.2.1 para n ³ 2.

Para n = 0 , teremos : 0! = 1.
Para n = 1 , teremos : 1! = 1

Exemplos:

a) 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720
b) 4! = 4.3.2.1 = 24
c) observe que 6! = 6.5.4!
d) 10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1
e) 10! = 10.9.8.7.6.5!
f) 10! = 10.9.8!

3 - Princípio fundamental da contagem - PFC

Se determinado acontecimento ocorre em n etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, **então** o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por:
$T = k_1 . k_2 . k_3 . ... . k_n$

Exemplo:

O DETRAN decidiu que as placas dos veículos do Brasil serão codificadas usando-se 3 letras do alfabeto e 4 algarismos. Qual o número máximo de veículos que poderá ser licenciado?

Solução:

Usando o raciocínio anterior, imaginemos uma placa genérica do tipo PWR-USTZ.
Como o alfabeto possui 26 letras e nosso sistema numérico possui 10 algarismos (de 0 a 9), podemos concluir que: para a 1ª posição, temos 26 alternativas, e como pode haver repetição, para a 2ª, e 3ª também teremos 26 alternativas. Com relação aos algarismos, concluímos facilmente que temos 10 alternativas para cada um dos 4 lugares. Podemos então afirmar que o número total de veículos que podem ser licenciados será igual a: 26.26.26.10.10.10.10 que resulta em 175.760.000. Observe que se no país existissem 175.760.001 veículos, o sistema de códigos de emplacamento teria que ser modificado, já que não existiriam números suficientes para codificar todos os veículos. Perceberam?

4 - Permutações simples

4.1 - Permutações simples de n elementos distintos são os agrupamentos formados com todos os n elementos e que diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos.

Exemplo: com os elementos A,B,C são possíveis as seguintes permutações: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA.

4.2 - O número total de permutações simples de n elementos distintos é dado por n!, isto é
P_n = n!   onde   n! = n(n-1)(n-2)... .1 .

Exemplos:

a) $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$
b) Calcule o número de formas distintas de 5 pessoas ocuparem os lugares de um banco retangular de cinco lugares.
$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

4.3 - Denomina-se ANAGRAMA o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na linguagem comum.

Exemplo:

Os possíveis anagramas da palavra REI são:
REI, RIE, ERI, EIR, IRE e IER.

5 - Permutações com elementos repetidos

Se entre os n elementos de um conjunto, existem a elementos repetidos, b elementos repetidos, c elementos repetidos e assim sucessivamente , o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$P_n^{(a,b,c,...)} = \frac{n!}{a!b!c!...}$$

Exemplo:
Determine o número de anagramas da palavra MATEMÁTICA.(não considere o acento)

Solução:
Temos 10 elementos, com repetição. Observe que a letra M está repetida duas vezes, a letra A três , a letra T, duas vezes. Na fórmula anterior, teremos: n=10, a=2, b=3 e c=2. Sendo k o número procurado, podemos escrever:
k= 10! / (2!.3!.2!) = 151200
Resposta: 151200 anagramas.

6 - Arranjos simples

6.1 - Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples de taxa k , a todo agrupamento de k elementos distintos dispostos numa certa ordem. Dois arranjos diferem entre si, pela ordem de colocação dos elementos. Assim, no conjunto E = {a,b,c}, teremos:

a) arranjos de taxa 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb.
b) arranjos de taxa 3: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

6.2 - Representando o número total de arranjos de n elementos tomados k a k (taxa k) por $A_{n,k}$, teremos a seguinte fórmula:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Obs : é fácil perceber que $A_{n,n} = n! = P_n$. (Verifique)

Exemplo:

Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0,1,2,...,9. O segredo do cofre é marcado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre, quantas tentativas deverá fazer(no máximo) para conseguir abri-lo?

Solução:

As sequências serão do tipo xyz. Para a primeira posição teremos 10 alternativas, para a segunda, 9 e para a terceira, 8. Podemos aplicar a fórmula de arranjos, mas pelo princípio fundamental de contagem, chegaremos ao mesmo resultado:
10.9.8 = 720.
Observe que 720 = $A_{10,3}$

7 - Combinações simples

7.1 - Denominamos combinações simples de n elementos distintos tomados k a k (taxa k) aos subconjuntos formados por k elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. Observe que duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, não importando a ordem em que os elementos são colocados.

Exemplo:

No conjunto E= {a,b.c,d} podemos considerar:
a) combinações de taxa 2: ab, ac, ad,bc,bd, cd.
b) combinações de taxa 3: abc, abd,acd,bcd.
c) combinações de taxa 4: abcd.

7.2 - Representando por $C_{n,k}$ o número total de combinações de n elementos tomados k a k (taxa k) , temos a seguinte fórmula:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Nota: o número acima é também conhecido como Número binomial e indicado por:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo:

Uma prova consta de 15 questões das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

Solução:

Observe que a ordem das questões não muda o teste. Logo, podemos concluir que trata-se de um problema de combinação de 15 elementos com taxa 10.

Aplicando simplesmente a fórmula chegaremos a:
$C_{15,10}$ = 15! / [(15-10)! . 10!] = 15! / (5! . 10!) = 15.14.13.12.11.10! / 5.4.3.2.1.10! = 3003

Agora que você viu o resumo da teoria, tente resolver os 3 problemas seguintes:

01 - Um coquetel é preparado com duas ou mais bebidas distintas. Se existem 7 bebidas distintas, quantos coquetéis diferentes podem ser preparados?
Resp: 120

02 - Sobre uma circunferência são marcados 9 pontos distintos. Quantos triângulos podem ser construídos com vértices nos 9 pontos marcados?
Resp: 84

03 - Uma família com 5 pessoas possui um automóvel de 5 lugares. Sabendo que somente 2 pessoas sabem dirigir, de quantos modos poderão se acomodar para uma viagem?
Resp: 48

Exercício resolvido:

Um salão tem 6 portas. De quantos modos distintos esse salão pode estar aberto?

Solução:

Para a primeira porta temos duas opções: aberta ou fechada
Para a segunda porta temos também, duas opções, e assim sucessivamente.
Para as seis portas, teremos então, pelo Princípio Fundamental da Contagem - PFC:
N = 2.2.2.2.2.2 = 64
Lembrando que uma dessas opções corresponde a todas as duas portas fechadas, teremos então que o número procurado é igual a 64 - 1 = 63.

Resposta: o salão pode estar aberto de 63 modos possíveis.

19. RACIOCÍNIO LÓGICO

I. INTRODUÇÃO

1. Lógica Formal.

Embora existam muitas definições para o campo de estudo da lógica, essas definições não diferem essencialmente umas das outras; há um certo consenso entre os autores de que a Lógica tem, por objeto de estudo, as leis gerais do pensamento, e as formas de aplicar essas leis corretamente na investigação da verdade.

Embora tenham sido encontrados na Índia, textos sobre esse assunto, escritos em épocas remotas, é tradicionalmente aceito que a Lógica tenha nascido na Grécia Antiga, por volta do século IV antes de Cristo. Os primeiros trabalhos sobre Lógica são devidos a Parmênides, Zenão, e ao grupo conhecido como "sofistas", mas o verdadeiro criador da Lógica é, sem dúvida, Aristóteles, pois foi ele quem sistematizou e organizou esse conhecimento, elevando-o à categoria de ciência. Em sua obra chamada Organum (que, em tradução livre, significa "ferramenta") Aristóteles estabeleceu princípios tão gerais e tão sólidos que dominou o pensamento ocidental durante dois mil anos, e até hoje são considerados válidos.

Aristóteles tinha como objetivo a busca da verdade, e, para isso, procurava caracterizar os instrumentos de que se servia a razão, nessa busca. Em outras palavras, Aristóteles se preocupava com as formas de raciocínio que, a partir de conhecimentos considerados verdadeiros, permitiam obter novos conhecimentos. Caberia, pois, à Lógica, a formulação de leis gerais de encadeamentos de conceitos e juízos que levariam à descoberta de novas verdades.

Essa forma de encadeamento é chamado, em Lógica, de argumento, enquanto as afirmações envolvidas são chamadas proposições; um argumento é, pois, um conjunto de proposições tal que se afirme que uma delas é derivada das demais; usualmente, a proposição derivada é chamada conclusão, e as demais, premissas. Em um argumento válido, as premissas são consideradas provas evidentes da verdade da conclusão.

Eis um exemplo de argumento:
Se eu ganhar na Loteria, serei rico
Eu ganhei na Loteria
Logo, sou rico

Como a conclusão "sou rico" é uma decorrência lógica das duas premissas, esse argumento é considerado válido.

É preciso deixar claro que a Lógica se preocupa com o relacionamento entre as premissas e a conclusão, com a estrutura e a forma do raciocínio, e não com seu conteúdo, isto é, com as proposições tomadas individualmente. Em outras palavras, não é objeto da Lógica saber se quem ganha na Loteria fica rico ou não, ou se eu ganhei ou não na Loteria. O objeto da Lógica é determinar se a conclusão é ou não uma conseqüência lógica das premissas. Por esse motivo, por que o objeto da Lógica é a forma pela qual o raciocínio está estruturado, a Lógica costuma receber o nome de Lógica Formal.

A validade do argumento está diretamente ligada à forma pela qual ele se apresenta, como pode ser mostrado pelo enunciado abaixo,

Se eu ganhar na Loteria, serei rico
Não ganhei na Loteria
Logo, não sou rico

que, embora seja semelhante ao anterior, tem outra forma, e, nessa forma, a conclusão não se segue logicamente das premissas, e, portanto, não é um argumento válido.

2. Dedução e Indução.

A Lógica dispõe de duas ferramentas principais que podem ser utilizadas pelo pensamento na busca de novos conhecimentos: a dedução e a indução, que dão origem a dois tipos de argumentos, dedutivos e indutivos. Os argumentos dedutivos pretendem que suas premissas forneçam uma prova conclusiva da veracidade da conclusão. Um argumento dedutivo é válido quando suas premissas, se verdadeiras, fornecem provas convincentes para sua conclusão, isto é, quando for impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa; caso contrário, o argumento dedutivo é dito inválido. Os dois argumentos citados anteriormente são do tipo dedutivo, o primeiro válido e o segundo inválido.

Os argumentos indutivos, por outro lado, não pretendem que suas premissas forneçam provas cabais da veracidade da conclusão, mas apenas que forneçam indicações dessa veracidade. Veja um exemplo de argumento indutivo:

Joguei uma pedra no lago, e a pedra afundou;
Joguei outra pedra no lago e ela também afundou;
Joguei mais uma pedra no lago, e também esta afundou;
Logo, se eu jogar uma outra pedra no lago, ela vai afundar.

Os termos "válidos" e "inválidos" não se aplicam aos argumentos indutivos; eles costumam ser avaliados de acordo com a maior ou menor possibilidade com que suas conclusões sejam estabelecidas.

Costuma-se dizer que os argumentos indutivos partem do particular para o geral, isto é, a partir de observações particulares, procura estabelecer regras gerais, que, no caso das ciências naturais, devem ser provadas por outros meios; os argumentos dedutivos, por seu lado, partem de regras gerais para estabelecer a veracidade de acontecimentos particulares. O desenvolvimento da ciência tem dependido, em grande parte, da habilidade em combinar os dois tipos de raciocínio.

3. Lógica Clássica e Lógica Simbólica.

Os argumentos formulados em uma linguagem natural, como o inglês ou português, são, muitas vezes, de difícil avaliação, principalmente por causa da ambiguidade inerente às linguagens naturais, e das construções às vezes vagas ou confusas dos termos. Em virtude desses fatos, a partir dos trabalhos de George Boole, em meados do século XIX, foram sendo utilizados cada vez mais símbolos de origem matemática para expressar os enunciados e raciocínios da Lógica. A Lógica apresentada dessa forma é chamada Lógica Matemática ou Lógica Simbólica, enquanto a Lógica baseada em linguagem natural é chamada Lógica Clássica.

À medida que a Lógica Simbólica desenvolve sua própria linguagem técnica, vem se tornando um instrumento cada vez mais poderoso para a análise e a dedução dos argumentos. A utilização de uma simbologia matemática ajuda a expor, com maior clareza, as estruturas lógicas das proposições e dos argumentos, que podem não ficar suficientemente claras se expressa em linguagem natural.

Uma outra vantagem da utilização de uma linguagem simbólica para a Lógica é a possibilidade de utilização de recursos computacionais no tratamento de enunciados e argumentos; os computadores digitais se mostram bastante adequados à manipulação de símbolos, enquanto apresentam extrema dificuldade no tratamento de linguagem natural. Em 1965, um pesquisador chamado Robinson desenvolveu um procedimento computacional para a dedução, chamado Resolução, evidenciando as vantagens da utilização de uma linguagem simbólica para a Lógica.

II. NOÇÕES DE LÓGICA

Proposição

Denomina-se proposição a toda sentença, expressa em palavras ou símbolos, que exprima um juízo ao qual se possa atribuir, dentro de certo contexto, somente um de dois valores lógicos possíveis:

verdadeiro ou **falso**.

Somente às sentenças declarativas pode-se atribuir valores de verdadeiro ou falso, o que ocorre quando a sentença é, respectivamente, confirmada ou negada. De fato, não se pode atribuir um valor de verdadeiro ou falso às demais formas de sentenças como as interrogativas, as exclamativas e outras, embora elas também expressem juízos.

São exemplos de proposições as seguintes sentenças declarativas:

O número 6 é par.
O número 15 não é primo.
Todos os homens são mortais.
Nenhum porco espinho sabe ler.
Alguns canários não sabem cantar.
Se você estudar bastante, então aprenderá tudo.
Eu falo inglês e espanhol.
Míriam quer um sapatinho novo ou uma boneca.

Não são proposições:

Qual é o seu nome?
Preste atenção ao sinal.
Caramba!

Proposição Simples

Uma proposição é dita **proposição simples** ou **proposição atômica** quando não contém qualquer *outra* proposição como sua componente. Isso significa que não é possível encontrar como parte de uma proposição simples alguma outra proposição diferente dela. Não se pode subdividi-la em partes menores tais que alguma delas seja uma nova proposição.
Exemplo:
A sentença "*Cíntia é irmã de Maurício*" é uma proposição simples, pois não é possível identificar como parte dela qualquer outra proposição diferente. Se tentarmos separá-la em duas ou mais partes menores nenhuma delas será uma proposição nova.

Proposição Composta

Uma proposição que contenha qualquer outra como sua parte componente é dita **proposição composta** ou **proposição molecular**. Isso quer dizer que uma proposição é composta quando se pode extrair como parte dela, uma nova proposição.

Conectivos Lógicos

Existem alguns termos e expressões que estão frequentemente presentes nas proposições compostas, tais como **não**, **e**, **ou**, **se ... então** e **se e somente se** aos quais denominamos conectivos lógicos. Os conectivos lógicos agem sobre as proposições a que estão ligados de modo a criar novas proposições.
Exemplo:
A sentença "***Se*** *x* ***não*** *é maior que y,* ***então*** *x é igual a y* ***ou*** *x é menor que y*" é uma proposição composta na qual se pode observar alguns conectivos lógicos ("não", "se ... então" e "ou") que estão agindo sobre as proposições simples "*x é maior que y*", "*x é igual a y*" e "*x é menor que y*".

Uma propriedade fundamental das proposições compostas que usam conectivos lógicos é que o seu valor lógico (verdadeiro ou falso) fica completamente determinado pelo valor lógico de cada proposição componente e pela forma como estas sejam ligadas pelos conectivos lógicos utilizados, conforme estudaremos mais adiante.

As proposições compostas podem receber denominações especiais, conforme o conectivo lógico usado para ligar as proposições componentes.

Conjunção: *A e B*

Denominamos conjunção a proposição composta formada por duas proposições quaisquer que estejam ligadas pelo conectivo "***e***".

A conjunção **A e B** pode ser representada simbolicamente como:

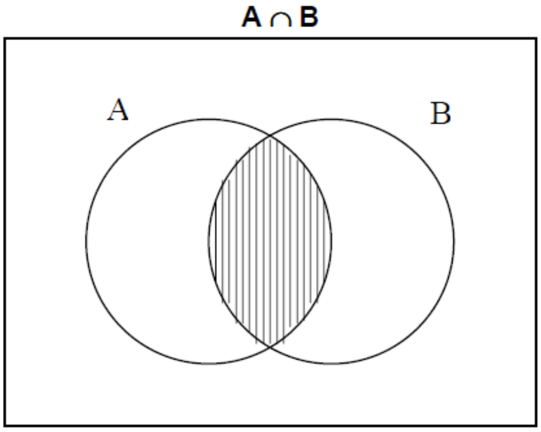
$A \wedge B$

Exemplo:

Dadas as proposições simples:
A: Alberto fala espanhol.
B: Alberto é universitário.

Se as proposições **A** e **B** forem representadas como conjuntos através de um diagrama, a conjunção "**A $\wedge$ B**" corresponderá à interseção do conjunto **A** com o conjunto **B**.

A $\cap$ B.



Uma conjunção é verdadeira somente quando as duas proposições que a compõem forem verdadeiras, Ou seja, a conjunção "**A $\wedge$ B**" é **verdadeira** somente quando **A** é **verdadeira** e **B** é **verdadeira** também. Por isso dizemos que a conjunção exige a **simultaneidade** de condições.

Na tabela-verdade, apresentada a seguir, podemos observar os resultados da conjunção "**A** e **B**" para cada um dos valores que **A** e **B** podem assumir.

A	**B**	**A $\wedge$ B**
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção: *A ou B*

Denominamos disjunção a proposição composta formada por duas proposições quaisquer que estejam ligadas pelo conectivo “**ou**”.

A disjunção **A ou B** pode ser representada simbolicamente como:

$A \vee B$

Exemplo:

Dadas as proposições simples:

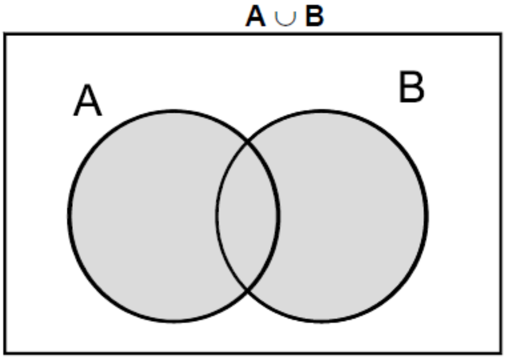
A: Alberto fala espanhol.
B: Alberto é universitário.

A disjunção “**A ou B**” pode ser escrita como:

A ∨ **B**: Alberto fala espanhol **ou** é universitário.

Se as proposições **A** e **B** forem representadas como conjuntos através de um diagrama, a disjunção “**A** ∨ **B**” corresponderá à **união** do conjunto **A** com o conjunto **B**.

A ∪ B



Uma disjunção é **falsa** somente quando as duas proposições que a compõem forem **falsas**. Ou seja, a disjunção “**A ou B**” é **falsa** somente quando **A** é **falsa** e **B** é **falsa** também. Mas se **A** for verdadeira ou se **B** for verdadeira ou mesmo se ambas, **A** e **B**, forem verdadeiras, então a disjunção será verdadeira. Por isso dizemos que, ao contrário da conjunção, a disjunção **não necessita da simultaneidade** de condições para ser verdadeira, bastando que pelo menos uma de suas proposiçoes componentes seja verdadeira.

Na tabela-verdade, apresentada a seguir, podemos observar os resultados da disjunção “**A ou B**” para cada um dos valores que **A** e **B** podem assumir.

A	**B**	**A ∨ B**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	**F**	**F**

Condicional: ***Se A então B***

Denominamos condicional a proposição composta formada por duas proposições quaisquer que estejam ligadas pelo conectivo “**Se ... então**” ou por uma de suas formas equivalentes.

A proposição condicional “**Se A, então B**” pode ser representada simbolicamente como:

$A \rightarrow B$

Exemplo:

Dadas as proposições simples:

A: José é alagoano.
B: José é brasileiro.

A condicional "**Se A, então B**" pode ser escrita como:

A → B: **Se** José é alagoano, **então** José é brasileiro.

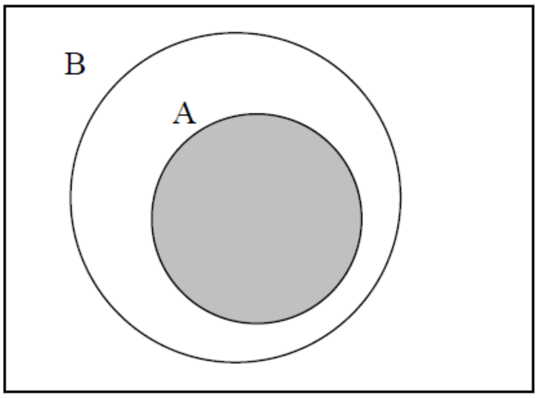
Na proposição condicional "**Se A, então B**" a proposição **A**, que é anunciada pelo uso da conjunção "**se**", é denominada **condição** ou **antecedente** enquanto a proposição **B**, apontada pelo advérbio "**então**" é denominada **conclusão** ou **conseqüente**.

As seguintes expressões podem ser empregadas como equivalentes de "**Se A, então B**":

*Se **A**, **B**.*
***B**, se **A**.*
*Todo **A** é **B**.*
***A** implica **B**.*
***A** somente se **B**.*
***A** é suficiente para **B**.*
***B** é necessário para **A**.*

Se as proposições **A** e **B** forem representadas como conjuntos através de um diagrama, a disjunção "**A** ∨ **B**" corresponderá à **união** do conjunto **A** com o conjunto **B**.

A ⊂ B



Uma condicional "**Se A então B**" é **falsa** somente quando a condição **A** é **verdadeira** e a conclusão **B** é **falsa**, sendo verdadeira em todos os outros casos. Isto significa que numa proposição condicional, a única situação que não pode ocorrer é uma condição verdadeira implicar uma conclusão falsa.

Na tabela-verdade apresentada a seguir podemos observar os resultados da proposição condicional "**Se A então B**" para cada um dos valores que **A** e **B** podem assumir.

A	B	A → B
V	V	V
V	**F**	**F**
F	V	V
F	F	V

Bicondicional: ***A se e somente se B***

Denominamos bicondicional a proposição composta formada por duas proposições quaisquer que estejam ligadas pelo conectivo "**se e somente se**".

A proposição bicondicional "**A se e somente se B**" pode ser representada simbolicamente como:

$A \leftrightarrow B$

Exemplo:

Dadas as proposições simples:
A: Adalberto é meu tio.
B: Adalberto é irmão de um de meus pais.

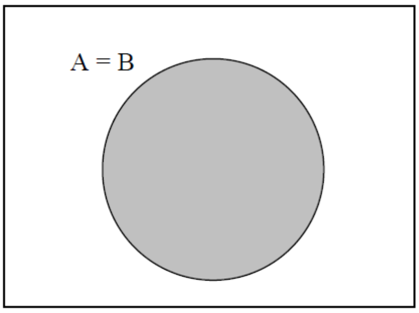
A proposição bicondicional "**A se e somente se B**" pode ser escrita como:
$A \leftrightarrow B$: Adalberto é meu tio **se e somente se** Adalberto é irmão de um de meus pais.

Como o próprio nome e símbolo sugerem, uma proposição bicondicional "**A se e somente se B**" equivale à proposição composta "**se A então B**".

Podem-se empregar também como equivalentes de "**A se e somente se B**" as seguintes expressões:

A *se e só se* ***B****.*
Todo ***A*** *é* ***B*** *e todo* ***B*** *é* ***A****.*
Todo ***A*** *é* ***B*** *e reciprocamente.*
Se ***A*** *então* ***B*** *e reciprocamente.*
A *somente se* ***B*** *e* ***B*** *somente se* ***A****.*
A *é necessário e suficiente para* ***B****.*
A *é suficiente para* ***B*** *e* ***B*** *é suficiente para* ***A****.*
B *é necessário para* ***A*** *e* ***A*** *é necessário para* ***B****.*

Se as proposições **A** e **B** forem representadas como conjuntos através de um diagrama, a proposição bicondicional "**A se e somente se B**" corresponderá à **igualdade** dos conjuntos **A** e **B**.



A proposição bicondicional "**A se e somente se B**" é **verdadeira** somente quando **A** e **B** têm o **mesmo valor lógico** (ambas são verdadeiras ou ambas são falsas), sendo **falsa** quando **A** e **B** têm **valores lógicos contrários**.

Na tabela-verdade, apresentada a seguir, podemos observar os resultados da proposição bicondicional "**A se e somente se B**" para cada um dos valores que **A** e **B** podem assumir.

A	**B**	**A ↔ B**
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	**F**	**V**

Negação: ***Não A***

Dada uma proposição qualquer **A** denominamos negação de **A** à proposição composta que se obtém a partir da proposição **A** acrescida do conectivo lógico "**não**" ou de outro equivalente.

A negação "**não A**" pode ser representada simbolicamente como:

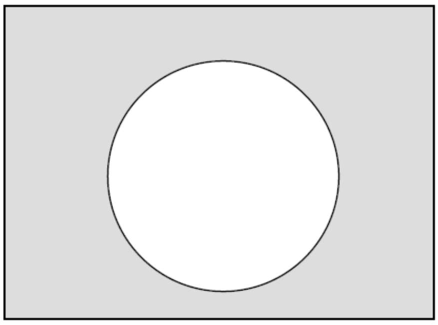
~A

Podem-se empregar, também, como equivalentes de "**não A**" as seguintes expressões:

*Não é verdade que **A**.*
*É falso que **A**.*

Se a proposição **A** for representada como conjunto através de um diagrama, a negação "**não A**" corresponderá ao **conjunto complementar** de **A**.

$\overline{A}$



Uma proposição **A** e sua negação "**não A**" terão sempre **valores lógicos opostos**.
Na tabela-verdade, apresentada a seguir, podemos observar os resultados da negação "**não A**" para cada um dos valores que **A** pode assumir**.**

A	~A
V	F
F	V

Tautologia

Uma proposição composta formada pelas proposições **A**, **B**, **C**, ... é uma **tautologia** se ela for **sempre verdadeira**, independentemente dos valores lógicos das proposições **A**, **B**, **C**, ... que a compõem.

Exemplo:

A proposição "*Se (**A** e **B**) então (**A** ou **B**)*" é uma tautologia, pois é sempre verdadeira, independentemente dos valores lógicos de **A** e de **B**, como se pode observar na tabela-verdade abaixo:

A	B	A e B	A ou B	(A e B) → (A ou B)
V	V	V	V	**V**
V	F	F	V	**V**
F	V	F	V	**V**
F	F	F	F	**V**

Contradição

Uma proposição composta formada pelas proposições **A**, **B**, **C**, ... é uma **contradição** se ela for **sempre falsa**, independentemente dos valores lógicos das proposições **A**, **B**, **C**, ... que a compõem.

Exemplo:

A proposição "***A*** ***s****e e somente se* ***não A***" é uma contradição, pois é sempre falsa, independentemente dos valores lógicos de **A** e de **não A**, como se pode observar na tabela-verdade abaixo:

A	**~A**	**A ←→ ~A**
V	F	**F**
F	V	**F**

Negação de Proposições Compostas

Um problema de grande importância para a lógica é o da identificação de proposições equivalentes à negação de uma proposição dada. Negar uma proposição simples é uma tarefa que não oferece grandes obstáculos. Entretanto, podem surgir algumas dificuldades quando procuramos identificar a negação de uma proposição composta.

Como vimos anteriormente, a negação de uma proposição deve Ter sempre valor lógico oposto ao da proposição dada. Deste modo, **sempre** que uma proposição **A** for verdadeira, a sua negação **não A** deve ser falsa e **sempre** que **A** for falsa**, não A** deve ser verdadeira.

Em outras palavras, a negação de uma proposição deve ser **contraditória** com a proposição dada.

A tabela abaixo mostra as equivalências mais comuns para as negações de algumas proposições compostas:

Proposição	**Negação direta**	**Equivalente da Negação**
A e B	Não (A e B)	Não A ou não B
A ou B	Não (A ou B)	Não A e não B
Se A então B	Não (se A então B)	A e não B
A se e	Não (A se e	[(A e não B) ou
somente se B	somente se B)	(B e não A)]
Todo A é B	Não (todo A é B)	Algum A não é B
Algum A é B	Não (algum A é B)	Nenhum A é B

Argumento

Denomina-se argumento a relação que associa um conjunto de proposições P1, P2, ... Pn, chamadas **premissas** do argumento, a uma proposição C a qual chamamos de **conclusão** do argumento.

No lugar dos termos **premissa** e **conclusão** podem ser usados os correspondentes **hipótese** e **tese**, respectivamente.

Os argumentos que têm somente duas premissas são denominados **silogismos**.

Assim, são exemplos de silogismos os seguintes argumentos:

I. P1: *Todos os artistas são apaixonados.*
P2: *Todos os apaixonados gosta de flores.*
C: *Todos os artistas gostam de flores.*

II. P1: *Todos os apaixonados gosta de flores.*
P2: Míriam gosta de flores.
C: Míriam é uma apaixonada.

Argumento Válido

Dizemos que um argumento é **válido** ou ainda que ele é **legítimo** ou **bem construído** quando a sua conclusão é uma **conseqüência obrigatória** do seu conjunto de premissas. Posto de outra forma: quando um argumento é válido, a verdade das premissas deve **garantir** a verdade da conclusão do argumento. Isto significa que jamais poderemos chegar a uma conclusão falsa quando as premissas forem verdadeiras e o argumento for válido.

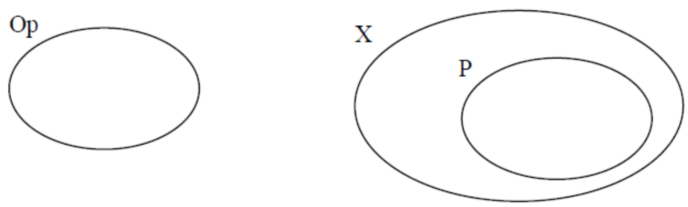
É importante observar que ao discutir a validade de um argumento **é irrelevante** o valor de verdade de cada uma das premissas. Em Lógica, o estudo dos argumentos não leva em conta a verdade ou falsidade das proposições que compõem os argumentos, mas tão-somente a **validade** destes.

Exemplo:

O silogismo:

"Todos os pardais adoram jogar xadrez.
Nenhum enxadrista gosta de óperas.
Portanto, nenhum pardal gosta de óperas."

está perfeitamente bem construído (veja o diagrama abaixo), sendo, portanto, um argumento válido, muito embora a verdade das premissas seja questionável.



Op = Conjunto dos que gostam de óperas

X = Conjunto dos que adoram jogar xadrez

P = Conjunto dos pardais

Pelo diagrama pode-se perceber que nenhum elemento do conjunto P (pardais) pode pertencer ao conjunto Op (os que gostam de óperas).

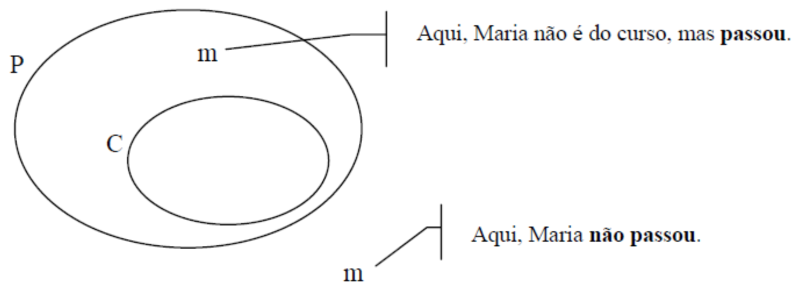
Argumento Inválido

Dizemos que um argumento é **inválido**, também denominado **ilegítimo**, **mal construído** ou **falacioso**, quando a verdade das premisssas **não é suficiente** para garantir a verdade da conclusão.

Exemplo:
O silogismo:

"Todos os alunos do curso passaram.
Maria não é aluna do curso.
Portanto, Maria não passou."

é um argumento inválido, falacioso, mal construído, pois as premissas **não garantem** (não obrigam) a verdade da conclusão (veja o diagrama abaixo). Maria pode Ter passado mesmo sem ser aluna do curso, pois a primeira premissa não afirmou que **somente** os alunos do curso haviam passado.



P = Conjunto das pessoas que passaram.

C = Conjunto dos alunos do curso.

Na tabela abaixo, podemos ver um resumo das situações possíveis para um argumento:

Quando um argumento é ...	E as premissas...	Então a conclusão será:
Válido (bem construído)	são todas verdadeiras	Necessariamente Verdadeira
	não são todas verdadeiras	ou Verdadeira ou Falsa
Inválido (mal construído)	são todas verdadeiras	ou Verdadeira ou Falsa
	não são todas verdadeiras	ou Verdadeira ou Falsa